图的理论及其应用

〔法〕C. 貝尔热 著
李 修 睦 譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书內容是广泛应用于各学科領域中的图論，根据現代数学的观点和方法，加以抽象化和形式化而建立起来的理論的綜述。全书共分21章（另附录5章），大体上前若干章集中研究有向图，其余部分則討論无向图，并介紹了所得結果在博奕論、規划論、信息論等許多領域中的应用。

本书可供高等院校师生、科研工作者、工程技术人員参考。

图的理论及其应用

THÉORIE DES GRAPHES

ET

SES APPLICATIONS

原 著 者 〔法〕Claude Berge

原出版者 Dunod Paris 1958

譯 者 李 修 睦

*

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出006号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

上海洪兴印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 9 16/32 字数 226,000

1963年3月第1版 1963年3月第1次印刷

印数 1—2,800

統一书号：13119 · 497

定 价：（十四）1.60元

序

在很多情况，人們惯于在紙上描点，以代表人物、地方或化学元素，等等，在点之間，則又联以直綫或矢綫，以表达某种关系。这种图表，以不同的名称，到处出現：社会結构（心理学），单純型（拓扑学），电路（物理学），組織体系（經济学），交通网絡，世系表，等等；命之曰图，系統研究其性质，无疑应以寇尼希（D. König）为第一人。

最可注意者，乃学科領域如此浩繁，却往往使用类似的定理。就吾人所知，克希霍夫（Kirchhoff）用以研究电路的“投射矩陣”，龐加萊（Henri Poincaré）将其引入拓扑学，以建立其“位置分析学”；“断点”概念，在社会学里，久为人之所知，但最近則又出現于电子学中；此种范例，实不胜枚举。为能广泛应用于极其分歧的学科領域，图的理論，乃不得不具有其独特的抽象性与形式化。

事实上，如“鏈”，如“路”，如“中心”等基本概念，若在图的实踐基础上，抽象地予以定义，則当图表一經給出，便易于識別。职此之故，图的理論，实不应与研究关系問題的代数理論相混同，至于固执己見，自当別論。此外，无視边的方向，对不能推广到 n 維的一些概念，又不感兴趣的近代組合拓扑学，則直至今天，其影响实鮮。例如有关交錯鏈的某些結果，既非代数性的定理，亦非拓扑性的定理，……。

本书之作，其目的在使讀者掌握一种数学工具，在多种应用学科中，在信息論，控制論，博弈論，运輸网絡与集合論，矩陣論或其他純抽象学科中，充分使用。

书中陈述的某些定理，实极淺易，数学家往往用之而不自覺，

盖这些定理，皆以一种特殊形式，出現于彼等所研究的問題中。本书之所以尽可能在一般形式下，陈述这些定理，簡化思維，乃其唯一希望。

与"軟"定理相对的，自亦有若干"硬"定理，这些定理，大都是各方面的科研成果，其論証极为細致，为了簡化其复杂性，唯一途徑，在給出更多更短的定理。

图的不同問題，在研究过程中，孰应在前，孰应在后，亦經类似的考虑，惟一时不易为讀者所觉察；所陈述的内容，則大都为接踵而来的定理論証所必需。

大体上，本书前若干章，集中研究"有向"概念，其后若干章，則集中研究"无向"概念。代数定义与集合理論，根据需要，陆續提出；矩陣知識，为 14，15，16 各章所必需。

最后，雷勾厄(J. Riguet)博士慨允将其在代数与数論討論班上的一篇报告(巴黎，1955)，作为本书附录的一部分，涉及精致的图的数数問題，特此致谢。

C. B.

符 号 表

(X, Y 表示集合；A, B 表示 X 的子集合；$x, y, z, \cdots$ 表示 X 的元素；Γ, Δ 表示多值映象；k 是大于零的整数。)

$x \in X$, $x \notin X$, p. 1

$A \subset B$, $A \subset\subset B$, $A = B$, p. 1-2

$A \cap B$, $A \cup B$, $A \times B$, $A - B$, p. 2

φ_A, p. 61

$|A|$, p. 18

$\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}^k$, p. 3;　$\varnothing$, p. 1;　$a_X^Y = (a_j^i)$, p. 162

$[k]_{(2)}$, $k \dot{+} k'$ p. 28;　$\omega + k$, p. 22

ΓA, $\hat{\Gamma}$, Γ^{-1}, $\Gamma\Delta$, p. 4-6;　Γ_A, p. 7

$u = (x, y)$, U, U_A^+, U_A^- p. 7;　U_x^+, U_x^-, p. 76

$\mu = (u_1, u_2, \cdots) = [x, y, \cdots, z]$; $l(\mu)$, $\mu[x, z]$ p. 8

$u = [x, y]$, U, p. 9;　U_x, p. 157

$\mu = (u_1, u_2, \cdots) = [x, y, \cdots]$, $-\mu$, $\mu' + \mu''$, p. 32

$x \leqslant y$, $x < y$, $x \equiv y$, p. 12

$G = (X, \Gamma) = (X, U)$, p. 6;　$G = (X, Y, \Gamma)$, p. 97;　$\bar{G}(W)$, p. 182;
　G^*, p. 225;　$G \times G'$,　$G + G'$, p. 26

$\rho(G)$, $\nu(G)$, p. 31;　$\gamma(G)$, p. 34;　$\alpha(G)$, p. 40;　$\theta(G)$, p. 43

$\beta(G)$, p. 45;　$\omega(G)$, p. 212;　$\rho(G)$, p. 124;　$\delta(G)$, p. 130

$\vec{d}(x, y)$, $e(x)$, p. 123;　$d^+(x)$, $d^-(x)$, p. 91;

$d(x, y)$, $d(x)$, p. 205　$d_x(U)$, p. 181

目　录

目 录

第 1 章　一般概念[1]

1　集合和多值映象

图論和一切近代数学理論一样，使用了許多簡括的符号，这些符号不只能簡化思維，且构成一种易于掌握和极其有效的工具。这些符号在集合論里已司空見慣，讀者諒已知之甚稔，但重述于此，仍覺較便。

一个**集合**就是具某种属性的某些物件的总集，这些物件叫做集合的**点**(或**元素**)。它們可能是人、城市、数、函数等等。以下进行的研究，和这些物件本身的性质无关。一般用大写拉丁字母 $A, B, X, \cdots$ 等表示集合，集合的点則用小写拉丁字母 $a, b, x, \cdots$ 等来表示。集合 A，其元素是 a, b, c, d 的，記为 $A=\{a, b, c, d\}$。

为了方便起見，"沒有元素"的总集，也看成是一个集合，記做 $\varnothing$，称为**空集**。有时，一个集合不用罗列元素的形式，而采取描述其元素属性的方法来定义，例如质数集合，这个集合記为 $A=\{x/x$ 是质数$\}$。

假使特性(1)导致特性(2)，記 $(1)\Rightarrow(2)$；若此二特性是等价的，則記 $(1)\Leftrightarrow(2)$。

設 A 和 B 是已知的两个集合，下列記号常被使用：

$a\in A$　a 是集合 A 的元素。

$a\notin A$　a 不是 A 的元素。

$A\subset B$　A **含于** B 内，或 A 是 B 的**子集合**(A 的每一元素都是

[1] 本章仅是以后用到的最基本概念的目录：好似某种游戏的规則，……。这些概念大都可以凭直觉加以体会，但为了避免可能的混淆，用公理形式予以定义还是必要的。

B 的元素)。

$A=B$　A 等于 B($A\subset B$ 且 $B\subset A$)。

$A\neq B$　A 不等于 B。

$A\subset\subset B$　A **真正含于** B 内($A\subset B$ 且 $A\neq B$)。

$A\cap B$　A 与 B 的**交集** (同时属于 A 和 B 的那些元素所成的集合)。

$A\cup B$　A 与 B 的**合集** (属于 A 或属于 B 或同时属于二者的那些元素的集合)。

$A-B$　属于 A 但不属于 B 的那些元素的集合(見图 1-1)。

$A\times B$　A 与 B 的**序积**[由 $a\in A$ 与 $b\in B$ 所成元素对(a, b)构成的集合](見图 1-2)。

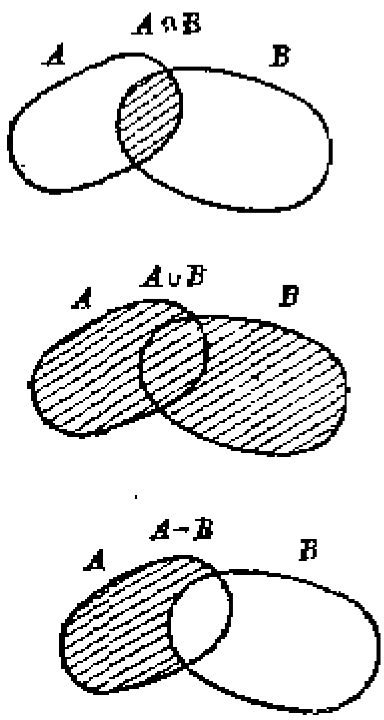


图 1-1

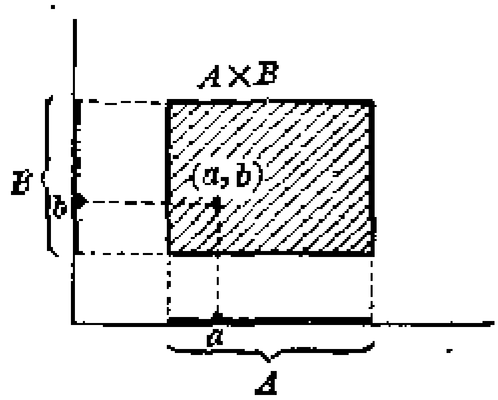


图 1-2

定义于两个集合 A 与 B 上的合集，交集与序积也可以定义于一族集合$(A_1, A_2, \cdots)$之上。

A_i 的**合集**，是至少属于一个这样集合的那些元素所成的集合，記做

$$\bigcup_i A_i,$$

A_i 的**交集**,是属于所有集合 A_i 的那些元素所成的集合,記做

$$\bigcap_i A_i.$$

A_i 的**序积**,是序列$(a_i/i=1, 2, \cdots)$所成的集合,其中对一切 i,有 $a_i\in A_i$,这个集合記为

$$\prod_i A_i.$$

含 n 个元素的序列,叫做 n-**塔**,我們不能把它和一个具 n 个元素的集合相混淆(一个 n-塔,它的元素間的顺序不能調动)。

【例1】**三維实空間**是 3-塔(a_1, a_2, a_3)的集合,其中 a_1, a_2, a_3 統是实数;它是三个集合的序积,其中每一集合都等于实数集 R;因此,我們常将三維实空間記为

$$R^3=R\times R\times R,$$

n 維实空間,同样可以表为 R^n.

以后常用到的另一重要概念,是**分划**这个概念。已給集合 X, X 的一个**分划**,按定义就是满足以下条件的一組集合 $A_1, A_2, \cdots, A_k\subset X$:

(1) $A_i\neq\varnothing\quad(i=1, 2, \cdots, k)$;

(2) $i\neq j\Rightarrow A_i\cap A_j=\varnothing$;

(3) $\bigcup_i A_i=X$.

設已給分划$(A_1, A_2, \cdots)$,若 x 与 y 是同一集合 A_i 的两个元素,即記 $x\equiv y$. 这样便定义了一个关系,記为$\equiv$,它具有以下諸特性:

(1) 反身性 $x\equiv x$;

(2) 对称性 $x\equiv y\Rightarrow y\equiv x$;

(3) 傳递性 $x\equiv y, y\equiv z\Rightarrow x\equiv z$.

一切关系$\equiv$满足特性(1),(2),(3)的,称为**等价关系**。显見等价关系$\equiv$定义 X 的一个分划,它的集合具下列形式:

$$A_i=\{x/x\in X,\ x\equiv x_0\}$$

(在此，x_0 是 X 的一个已知点)。

集合 A_i 有时称为含 x_0 的等价类。

【例2】 設 p 是一个整数，若 x 和 y 是两个整数，除 p 的一个倍数外，二者相等，则記

$$x\equiv y \qquad (\mathrm{mod}\ p).$$

显見这是一个等价关系。

【例3】 若二直綫 D 与 D' 平行或重合，記做 $D\parallel D'$，显見 $\parallel$ 是一个等价关系。

【例4】 若二人 x 和 y 有相同顏色的眼睛，記做 $x\equiv y$；显見 $\equiv$ 是一个等价关系。

已給二集合 X 和 Y，又給一个规律 σ，使每一元素 $x\in X$ 恒对应于 Y 的一个确定的元素，記为 σx，这个规律叫做 **X 在 Y 里的单值映象**，或称为定义于 X 上而在 Y 里取值的函数；例如，实变数的数值函数是一个自 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的单值映象。自 X 到 Y 的**多值映象**，是一种规律，它使每一元素 $x\in X$ 对应于 Y 的一个确定的子集，記为 Γx；可能 $\Gamma x=\varnothing$.

若只說映象，一般均指单值映象，但本书所用到的映象，大部不是单值的，因此，本书不用这样的默契。以后用及"映象"这一名詞时，均取其較广的意义。

已給集合 X 及 X 到 X 的一个映象 Γ，若 $A\subset X$，称集合

$$\Gamma A=\bigcup_{x\in A}\Gamma x$$

为 A 的象。

若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是 X 的子集，易証

$$\Gamma\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}\Gamma A_i,$$

$$\Gamma\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)\subset\bigcap_{i=1}^{n}\Gamma A_i.$$

若 Δ 是另一自 X 到 X 的映象，組合积 $\Gamma\Delta$ 为由下式定义的映象：

$$(\Gamma\Delta)x=\Gamma(\Delta x).$$

映象 Γ^2, Γ^3, … 等定义如下：

$$\Gamma^2x=\Gamma(\Gamma x),$$
$$\Gamma^3x=\Gamma(\Gamma^2x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Γ 的閉是由下式定义的自 X 到 X 的映象 $\hat{\Gamma}$：

$$\hat{\Gamma}x=\{x\}\cup\Gamma x\cup\Gamma^2x\cup\Gamma^3x\cup\cdots.$$

Γ 的逆是由下式定义的映象 Γ^{-1}：

$$\Gamma^{-1}y=\{x/y\in\Gamma x\}.$$

故若 B 是 X 的子集，可記

$$\Gamma^{-1}B=\{x/\Gamma x\cap B\neq\varnothing\}.$$

【例 5】 設 X 是人的集合，又設 $x\in X$，記 Γx 为 x 的子女所成的集合，则

Γ^2x：x 的孙儿和孙女所成的集合；

$\hat{\Gamma}x$：x 及其后代所成的集合；

$\Gamma^{-1}x$：x 的双亲，等等。

經常用点来表示人，x 是 y 的父亲，用一个自 x 到 y 的矢綫来表示，这便成了一个族树。

【例 6】 現在来看下棋；棋的一着，为一格（考虑走棋时棋子在棋盘上的位置）及一个路綫（着棋人准备走棋的打算）所定。設 X 为所有可能的着的集合，又設 $x\in X$，则 Γx 是按走棋規則紧跟在 x 着之后所有可能的着；若 x 是杀着或末着，則 $\Gamma x=\varnothing$. 于此有

Γ^3x：在 x 着之后經过三次走动所有可能的着的集合；

$\hat{\Gamma}x$：x 着以及 x 着之后迟早可能遇到的所有的着的集合；

$\Gamma^{-1}A(A\subset X)$：所有可能走到 A 里其一着的那些着的集合。

使用这組記号，可以应用公式安排准着，并从而引导出一些特性[1]。

[1] 見貝尔热(C. Berge)[1]。

在走棋的情况，其规律由集合 X 与映像 Γ 完全确定；可是，摆在面前的着数极多，不可能将着用点，将映象 Γ 用連接某些点的矢綫来表示。但当人們回到公理方法，走棋的規律和一群人的家族关系，二者的某些共同特性，是可以显示出来的；这就是我們准备在下节进行研究的。

2 图的路与回路

每当人們有了

1° 集合 X，

2° 自 X 到 X 的一个映象 Γ，

即謂已有了一个图。正确地讲，記做 $G=(X, \Gamma)$ 的图，实由集合 X 与映象 Γ 所构成的偶对。一群人的亲属关系构成一个图；走棋的規律，一組电气設备的接联，同一竟赛所有参加人之間的胜敗关系，等等都同样构成图。

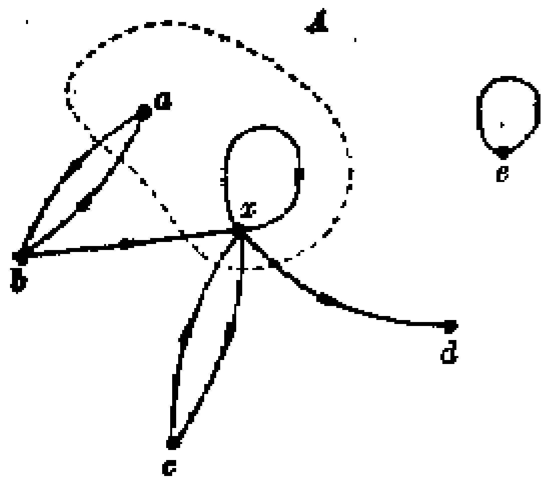


图 1-3

只要可能，总将集合 X 里的元素表成平面上的点，又若两点 x 与 y，当 $y\in\Gamma x$ 时，則自 x 到 y 作一連續矢綫。因此，X 的元素称为图的**点**或**頂**，而偶对 (x, y)，其中 $y\in\Gamma x$，則称为图的**弧**。弧的集合，用 U 来表示，这些弧本身則用 u, v 或 w 等来表示(在需要的时候，这些字母且可附加指标)。

【例1】 图1-3所表示的图 G，集合 X 乃由頂点 a, b, c, d, e, x 等所构成；集合 U 由弧 $(a, b), (b, a), (b, x), (x, x), (x, c), (c, x), (x, d), (e, e)$ 等所构成。映象 Γ 則甚易确定；譬如

$$\Gamma x=\{x, c, d\},$$

$$\Gamma d=\varnothing,\text{ 等等。}$$

象映象 Γ 确定集合 U 一样，易見弧的集合也完全确定图的映象；因此，可将一个图无分别地写成 $G=(X,\Gamma)$ 或 $G=(X,U)$。

图 (X,Γ) 的**子图**，按定义是一个形如 (A,Γ_A) 的图，其中 $A\subset X$，映象 Γ_A 則定义为

$$\Gamma_A x=\Gamma x\cap A.$$

(X,Γ) 的**部分图**，按定义是一个形如 (X,Δ) 的图，其中 $\Delta x\subset\Gamma x$ 对一切 x 均成立。

(X,Γ) 的**部分子图**，按定义是一个形如 (A,Δ_A) 的图，其中 $A\subset X$，且 $\Delta_A x\subset\Gamma x\cap A$。

【例 2】 令图 (X,U) 代表法国的道路图，X 是法国城市的集合，一条道路，无論其重要与否，自 x 城通向 y 城，則 $(x,y)\in U$。干道图是一个部分图，而諾曼地的道路图則是一个子图。

对于一条弧 (a,b)，a 称为它的**起点**，b 称为它的**終点**。两条弧 u 与 v 称为是**相邻的**，若

1° 这两条弧不相同，

2° 这两条弧有一个共同的端点（不管它是 u 的終点或起点，或是 v 的終点或起点）。

同样，有两个頂点 x 和 y，若

1° 这两个頂点不相同，

2° 有一条弧 $u=(x,y)$ 自 x 通向 y，

則这两个頂点称为是**相邻的**。

最后，設頂点 x 是弧 u 的起点，而弧 u 的終点异于 x，称弧 u **外向过** x。同样，可以定义一条弧**内向过**一个頂点。这种概念，甚易加以推广；設 A 是已給的一組頂点，若

$$u=(a,x),\quad a\in A,\quad x\notin A,$$

弧 u 称为外向过 A。外向过頂点組 A 的弧組，記为 U_A^+，内向过頂

点組 A 的記为 U_A^-.

过頂点組 A 的那个弧組，記为 $U_A=U_A^+\cup U_A^-$.

讀者可以驗証，在图 1-3 的那个图里，对于 $A=\{a, x\}$，有

$$U_A^+=\{(a, b), (x, c), (x, d)\},$$
$$U_A^-=\{(b, a), (b, x), (c, x)\}.$$

在一个图 $G=(X, U)$ 里，弧列 $(u_1, u_2, \cdots)$，其中每一条弧的終点，恰和緊接其后那条弧的起点相合，这个弧列叫做路。若一条路其中同一条弧不用两回，这条路叫做是单純的，否則是复杂的。

若一条路 μ 連續过頂点 $x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}$，可将路 μ 記为 $\mu=[x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}]$；一条路使用路 μ 自 x_2 到 x_k 的那些弧，这条路可記为

$$\mu[x_2, x_k]=[x_2, x_3, \cdots, x_k].$$

一条路，其中同一个頂点只用到一回，叫做是初級的；一条路可能是有限的，也可能是无限的。

回路是一条有限的路 $\mu=[x_1, x_2, \cdots, x_k]$，其起点 x_1 和終点 x_k 相重合；一条回路所經过的頂点都相异，这条回路就叫做是初級的(除起点和終点相重合外)。

路 $\mu=(u_1, u_2, \cdots, u_k)$ 的长，是弧列里弧的个数(譬如：$l(\mu)=k$)；若路是无限的，則取 $l(\mu)=\infty$. 最后，长是 1 的回路，它仅由唯一的弧 (x, x) 所构成，这样的回路叫做环。

【例 3】 某一組織里的职位 令 X 是組織里成員的集合，譬如一个軍事机构，Γx 表示指揮員 x 直接指揮的人群。一个指揮員和他的每一个部下可用图 (X, Γ) 里的一条路来联系；在这样的图里，不可能有回路，否則将导致矛盾的指揮。

弧，路，回路等概念，可用以刻划图的某些重要属性。首先，若

$$(x, y)\in U \Rightarrow (y, x)\in U,$$

謂图 (X, U) 是对称的。

在一个对称图里，二相邻頂点 x 和 y，总用两条方向相反的弧相联，为了簡化表示，在这种图上，二邻点就用一条不带箭头的綫把它們連接起来。

若

$$(x, y) \in U \Rightarrow (y, x) \notin U,$$

謂图 (X, U) 是**反对称的**（每一对相邻的頂点，仅接一个方向相連接）。

若

$$(x, y) \notin U \Rightarrow (y, x) \in U,$$

謂图 (X, U) 是**完备的**（每一对頂点，至少按两个方向中的一个方向相連接）。

最后，对任二頂点 x 和 $y(x \neq y)$，若总存在自 x 走向 y 的一条路，则这个图称为是**严格連接的**。

【例 4】 交通网　設 X 是一群人，若 x 能直接发送信息給 y，令 $(x, y) \in U$。一般地讲，若信息的傳遞，是采用无綫电报，电話，或敲鑼等方式的，则这样的图是对称的。若信息的傳遞是采用照明的火炬，或信鴿飞行，则这样的图就不一定总是对称的。

但在一个理想的交通网上，每一个人則都有可能直接或用連續傳遞方式发送信息給交通网里其他任何一个人；换句話說，这样的图是严格連接的。

3 图的鏈与圈

在图 $G=(X, U)$ 里，两个頂点 x 和 y，若有 $(x, y) \in U$ 或 $(y, x) \in U$，则这两点所构成的点組定义为一条边。这个概念和弧是不一样的，因为弧总意謂一个方向。在图 1-3 那个图里，共有 8 条弧，但只有 6 条边。

边恒用粗写的拉丁字母譬如 $\mathbf{u}$ 或 $\mathbf{v}$ 来表示，边所构成的集合用 $\mathbf{U}$ 表示。以頂点 x 和 y 做端点的边，記为 $\mathbf{u}=[x, y]$，

鏈是一个边列$(u_1, u_2, \cdots)$，其中每一边u_k和u_{k-1}以一个端点相銜接，和u_{k+1}則以另一个端点相銜接。若鏈里所用到的边都相异，这个鏈叫做**单純的**，否則是**复杂的**。

圈是一个鏈，它起于頂点x，又終于同一頂点x。若圈里用到的边都相异，这个圈是**单純的**，否則是**复杂的**；最后，若圈上每个頂点的出現不超过一次，这个圈称为是**初級的**。

一个图，若其上每二相异頂点之間，总存在一个鏈，自一个頂点联到另一頂点，則这个图是**連接的**。一个严格連接的图总是連接的，但反过来則未必真实。

已給頂点a，所有可与a用一个自a扩展出去的鏈相連接的頂点，其集合記为C_a。一个**連接的分图**(或簡称**分图**)是一个由形如C_a的集合所构成的子图。

于此，給出下二簡单的定理：

定理1　图(X, Γ)的不同的分图，构成X的一个分划，即謂：

(1)　$C_a \neq \varnothing$，

(2)　$C_a \neq C_b$导致$C_a \cap C_b = \varnothing$，

(3)　$\bigcup C_a = X$。

因$a \in C_a$，故有(1)。

为了驗証(2)，可設$C_a \cap C_b \neq \varnothing$，而去証$C_a = C_b$。

設$x \in C_a \cap C_b$，則頂点x可用一条鏈与a相联，也可用一条鏈与b相联，因此a能与b相联，故$b \in C_a$，遂有

$$C_b \subset C_a.$$

同样可証$C_a \subset C_b$(用对称的道理)，故$C_a = C_b$。

(3)之成立，实因

$$X \supset \bigcup_{a \in X} C_a \supset \bigcup_{a \in X} \{a\} = X,$$

亦即

$$\bigcup C_a = X.$$

定理2 当且仅当一个图仅含一个分图，则这个图是连接的。

若一个图含有两个不同的分图 C_a 与 C_b，这个图便不可能是连接的，因 a 与 b 不可能用一条链相联接。

若一个图是不连接的，则将存在两个顶点 a 和 b 不可能用一条链相联，因此，C_a 与 C_b 便是两个不同的分图。

〔注〕 一个图可从有向弧这个角度来加以研究，也可以从边这个角度来加以研究。在前一情况，可得概念：路，回路，严格连接等；在后一情况，则有链，圈，连接等概念。因此，在一个图上，每次用弧定义一个概念"……"，总可平行地用边定义出一个新的概念，这样的概念，称为"半……"。"半"这个詞，在这里具有十分特殊的意义。

第 2 章　后继理論的初步研究

4　图上的半序关系

在代数学里，在一个集合 X 上，若关系 $\leqslant$ 具有下二性质：

(1) **反身性**　$x \leqslant x$（对一切 $x \in X$ 均成立），

(2) **傳遞性**　$x \leqslant y,\ y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$，

则这个关系便是在集合 X 上的一个**半序关系**。

半序关系到处可以遇到："x 是整数 y 的整倍数"，"x 是一个大于 y 的实数"，"x 是一种情况，优越于情况 y"，等等，都是半序关系。

在图 $G=(X, \Gamma)$ 上，可按下面的方式，建立起一个半序关系：图上的任二顶点 x 和 y，若 $x=y$ 或存在一条路自 x 走向 y（卽謂若 $y \in \hat{\Gamma} x$），则記 $x \leqslant y$.

这一关系 $\leqslant$ 确能满足(1)与(2)，它是一个半序关系，一般把它叫做**在图 G 上确定的半序关系**。

$x \leqslant y$ 意謂：顶点 x **前于**顶点 y.

$y \leqslant x$ 也可記为 $x \geqslant y$；此时称：顶点 x **后于**顶点 y.

若 $x \leqslant y$，而又 $y \leqslant x$，記 $x \equiv y$；此时称顶点 x 等价于顶点 y；在这种情况，x 与 y 重合或在同一回路上。讀者可立卽驗証 $\equiv$ 是一个等价关系，卽謂它是一个关系，具下三性质：

(1) 反身性　$x \equiv x\ (x \in X)$，

(2) 傳遞性　$x \equiv y,\ y \equiv z \Rightarrow x \equiv z$，

(3) 对称性　$x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$.

若 $x \leqslant y$，但 $x \equiv y$ 不成立，则記 $x < y$，此时謂：顶点 x 是顶点 y 的**先行**。我們也把这样的关系記为 $y > x$，这时则称：顶点 y 是顶

点 x 的**后继**。

設 $B\subset X$，若頂点 z 后于 B 的一切頂点，z 叫做 B 的**上界**，記作

$$z\geqslant b \quad (b\in B)\text{.}$$

若在 B 内存在一个元素，它是 B 的上界，这个元素叫做 B 的**极大**。若 b 与 b' 是 B 的两个极大，则 $b\leqslant b'$ 且 $b'\leqslant b$，因而 $b\equiv b'$：所有的极大是等价的。

同样，所謂 B 的下界，是一个元素 z，它具下列性质：

$$z\leqslant b \quad (b\in B)\text{.}$$

B 的下界，同时又属于 B 的，叫做 B 的**极小**。

这些概念，在代数学里已为大家所熟知，首先可用以刻划图的不同类型。

【例1】无回路的图 若 (X, Γ) 没有回路，则定义于这个图上的关系 $\leqslant$ 具有下列性质：

$$x\leqslant y,\quad y\leqslant x \Rightarrow x=y\text{.}$$

在这种情况，称 $\leqslant$ 是一个序关系。

反过来，若定义于图上的关系是一个序关系，这个图便不可能有回路。

作为例，考虑集合 X 和 X 的一个子集族 $\mathscr{F}$，取 $\mathscr{F}$ 的元素做頂点，若 $F\in\mathscr{F}$，$F'\in\mathscr{F}$，且

1° $F\subset F'$,

2° 不存在子集 $G\in\mathscr{F}$，滿足 $F\subset G\subset F'$,

即謂有一个自 F 走向 F' 的弧，这样确定的图 G，叫做 $\mathscr{F}$ 的哈綫(Hasse)表。定义于图 G 上的关系是 $\subset$，它是一个序关系，故 G 无回路。对于 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$，究竟有多少个族集 $\mathscr{F}$ 具同一个已知的哈綫表：研究这样的問題，是很有兴趣的，这个問題，有时叫做莱內(Rainey)問題，目前只解决到 $n\leqslant 5$。

【例2】傳递图 图 (X, U)，若

$$x\leqslant y \Rightarrow (x, y)\in U,$$

这个图便叫做是傳递的。

例如圖的頂点代表人，弧代表領导关系，这样便得一个傳递图。

【例3】 **完全图**　已給半序关系 $\leqslant$，若关于任一点对 (x, y)，恒有 $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$，则这个关系称为**全序的**。若定义于图上的半序关系是全序的，这个图便是**完全的**。于此有下結論：**所有严格連接图都是完全的。**

【例4】 **格形图与树形图**　考虑定义于沒有回路的图 (X, Γ) 上的序关系 $\leqslant$，若集合 $B\subset X$ 的上界有一极小 c，则 c 叫做 B 的**上限**。若每一集合 B 都有一个上限，序关系 $\leqslant$ 叫做是(上)**格形的**，图 (X, Γ) 也叫做是**上格形的**。

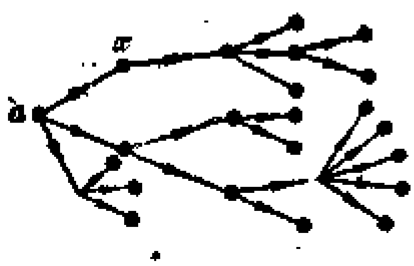


图　2-1

同样，可定义 B 的**下限**和**下格形的图**。

格形图的一个特殊情况是：图 2-1 那样形状所謂由根 a 成长的树。树形图将在以后加以研究(第16章)。

5　誘导图和图的底

若集合 $B\subset X$ 具下二性质：

(1)　$b_1\in B,\ b_2\in B,\ b_1\neq b_2 \Rightarrow b_1\leqslant b_2$ 与 $b_2\leqslant b_1$ 都不成立；

(2)　$x\notin B \Rightarrow$ 存在一个 $b\in B$，使 $b\geqslant x$，

则 B 是图 (X, Γ) 的一个**底**。

【例1】 研究图 2-2 的那个图。

集合 $B=\{b_1, b_2, \cdots\}$ 是一个底，但由 $X-B$ 构成的子图沒有底。

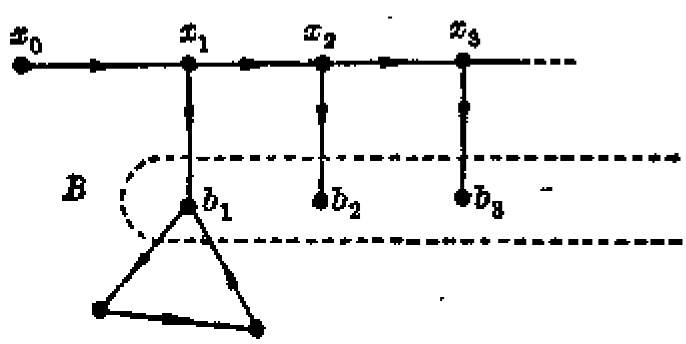


图　2-2

图的底这个概念，出现于有关交通网絡的許多問題中，我們且將把这个概念应用到博奕論中去(第5章与第6章)。最后，这个

概念也可用来建立拓扑学或綫性分析中某些純理論的論断。这里将仅确定一个充分一般且具有限个頂点或否的图有底存在的条件。

一个图,若其每一条路 $\mu=[x_1, x_2, \cdots]$ 都有上界,卽謂总存在頂点 z,使下式成立

$$z\geqslant x_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots),$$

这样的图叫做是**誘导的**。

【例 2】 有限图总是誘导的,盖若路 μ 是有限的,其最后一个頂点便是一个上界;若路 μ 是无限的,則在路 μ 里将有一个頂点重复无限多次,这个頂点便是 μ 的一个上界。

【例 3】 与此相反,图 2-2 里那个图不是誘导的。

在某些問題里(第 5 章),誘导图这个概念不够充分;对于图的每一条无限路 $\mu=[x_0, x_1, \cdots]$,在集合$\{x_0, x_1, \cdots\}$所成子图上建立起来的半序关系 $\leqslant^{\mu}$,当 i 和 j 充分大时,若恒有 $x_i\equiv^{\mu}x_j$,便謂这个图是**全誘导的**。

【例 4】 对于图 2-3 的那个图,有

$$x_i\equiv^{\mu}x_j \quad (i\geqslant 3, j\geqslant 3),$$

因而这个图是全誘导的。

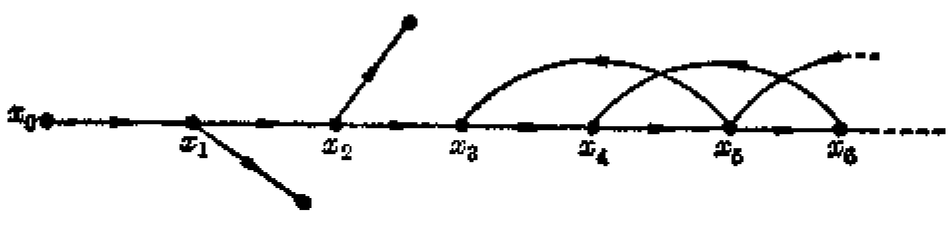


图 2-3

显見全誘导图是誘导的;此外,全誘导图还有次之基本性质:全誘导图的每一子图是全誘导的。(对于誘导图,就不存在类似的性质。)

曹恩(Zorn)引理 若图(X, Γ)是誘导的，則对于每一頂点x，恒存在一个沒有后继元素的頂点z，使$z \geqslant x$。

（这是集合論里一个很有名的論断，欲知其証，可看[E. T. F. M.]第3章。）

定理1 一切誘导图总有底[1]。

設Z是一切沒有后继元素的頂点集合，在Z内考虑由半序关系$\leqslant$所定义的等价关系$\equiv$（若z_1与z_2在同一回路上，則$z_1 \equiv z_2$），在每一等价类C_i内，挑选一个代表b_i，茲往証集合$B=\{b_i/i \in I\}$就是图的一个底。

1° 对于$i \neq j$，不可能有$b_i < b_j$，否則将有$b_i \equiv b_j$（因b_i沒有后继元素），因而b_i与b_j将属于同一个等价类（但这是不可能的，因等价类是两两互不相交的）。

2° 若$x \notin B$，按曹恩引理，必存在一个无后继元素的点z_0，使$z_0 \geqslant x$；設b_i是等价类$C_i=\{z/z \in Z,\ z \equiv z_0\}$的代表元素，便恰有

$$x \leqslant b_i, \quad b_i \in B.$$

定理2 若图(X, Γ)具有有限底B，則这个图是誘导的。

設$\mu=[x_1, x_2, \cdots]$是图的一条无限路（假使有这样的路存在），令$b_1, b_2, \cdots$是B的頂点，对一切n有$b_n \geqslant x_n$；但因B是有限的，故至少存在一个頂点b_k，在序列(b_n)里出現无限多次；于是

$$b_k \geqslant x_n \quad (n=1, 2, \cdots).$$

定理3 在沒有后继元素的那些頂点所成的集合Z内，考虑所有形如$\{z/z \in Z,\ z \equiv z_0\}$的等价类，若原給的图有底$B$存在，則底$B$实由在每个等价类里选取一个元素所构成。

設B是底，則頂点$b \in B$无后继元素，因若$x > b$，則又因必有元素$b' \in B$，使$b' \geqslant x$，故有$b' > b$，但这和B是底相違。

B至少含有一点在类$\{z/z \in Z,\ z \equiv z_0\}$内，否則将不存在任何

---

[1] 可以証明，这个定理和曹恩引理是等价的；本定理的直接論証，长且繁冗。

路，自 z_0 走进 B.

B 不可能有两个相异元素 b 与 b' 在同一个等价类內，盖若如此，则将有 $b\equiv b'$，因而存在一条路，自 B 的一个点走向 B 的另一点。

推理 假使一个图有底，那么，所有它的底都有相同的势。在特殊情况，若一个有限图有底（自也是誘导的），则所有它的底，均具相同个数的元素。

这个論断的成立，实由于在定理 3 里所考虑的等价类构成 Z 的一个分划。

第 3 章　无限图上的序数函数和格隆地函数

6　在无限图上的推广

设 A 是一个有限集合，用 $|A|$ 表示其所含元素的个数；若 A 含无限个元素，取 $|A|=\infty$。

图 (X, Γ)，若 $|X|<\infty$，謂图是有限的。若对一切 x 有 $|\Gamma x|<\infty$，这个图称为 Γ–有限；若对一切 x 有 $|\Gamma^{-1}x|<\infty$，这个图称为 Γ^{-1}–有限；一个图同时具备这些性质，称为处处有限。一个有限图显然也是处处有限的。

最后，若存在整数 m，使对一切 x，有 $|\Gamma x|\leqslant m$，则图称为 Γ–限制。

【例 1】 考察图 3-1 里那个图，这个图是 Γ–有限的，但不 Γ–限制，也不 Γ^{-1}–有限。

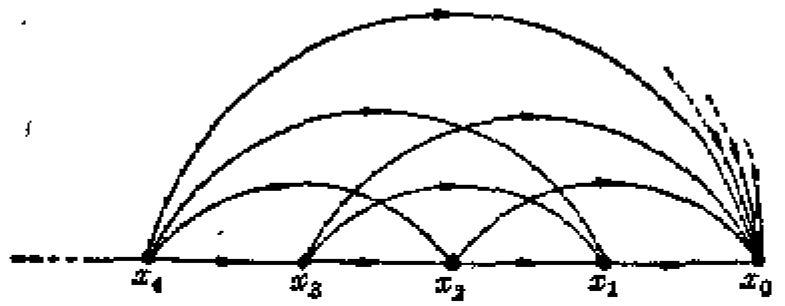


图 3-1

在一个图里，若不存在自顶点 x_0 出发的无限长的路，便称这个图在 x_0 上有限扩張。若一个图在其每一顶点上都有限扩張，这个图称为是有限扩張的。

若存在一个数 m，使自顶点 x_0 出发的每一条路，其长均小于

或等于 m，这个图称为**在顶点 x_0 上限制扩張**。若在每一顶点上都是限制扩張的，这个图便称为是**限制扩張的**。一个限制扩張的图，必也有限扩張，但反过来未必真实。

最后，若图 (X, Γ^{-1}) 是有限扩張或限制扩張的，图 (X, Γ) 便相应地称为**有限回縮**或**限制回縮**的。

【例 2】 图 3-1 里那个图是有限扩張的，但不有限回縮；虽然图里存在任意长的路，但这个图仍是限制扩張的。

我們將在本节建立一些十分一般的定理，其在有限图上的論断，将在以后推广到某些无限图上去。

这个問題是有其现实意义的：譬如在心理学或运筹学里，除有限图外，无其他的图，但在几何学与集合論里，与此相反，实际用到的都是无限图。

定理 1 設图是有限的，則性质"限制扩張"，"有限扩張"和"沒有回路"是等价的。

（显然）

定理 2 若图 (X, Γ) 是有限扩張和 Γ-有限的，則

$$|\hat{\Gamma}x| < \infty \quad (x \in X).$$

事实上，設对某一顶点 x_0，有 $|\hat{\Gamma}x_0| = \infty$，因 $|\Gamma x_0| < \infty$，在 Γx_0 內至少有一个顶点 x_1，其 $|\hat{\Gamma}x_1| = \infty$；同样，在 Γx_1 里至少存在一个 x_2，其 $|\hat{\Gamma}x_2| = \infty$；等等……。于是路 $[x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots]$ 将具无限长度，这和假設相違。

推理 1 图 (X, Γ) Γ-有限，且在顶点 x_0 上有限扩張，則这个图在顶点 x_0 上必也限制扩張。

事实上，集合 $\hat{\Gamma}x_0$ 所构成的子图有限扩張，按定理 2 这个子图是有限的；此外这个子图沒有回路，故它是限制扩張的（定理 1）。因此，图 G 在 x_0 上限制扩張。

推理2 (寇尼希 König) 設 $(A_1, A_2, \cdots)$ 是两两互不相交非空有限集合的序列，又設 $\prec$ 是定义在两个相继集合 A_n 元素間的一个关系，若对每一 $x_n \in A_n$ 恒存在 $x_{n-1} \in A_{n-1}$，使 $x_{n-1} \prec x_n$，則必存在序列 $(a_1, a_2, \cdots)$，对所有的 n 有 $a_n \in A_n$，且

$$a_1 \prec a_2 \prec a_3 \prec \cdots \prec a_n \prec \cdots.$$

在 A_n 等的合集上，增加任一点 x_0，扩充成一集合，設为 X，再在 X 上按下二規律，定义映象 Γ:

$$\Gamma x_0 = A_1,$$

$$\Gamma a_n = \{x / x \in A_{n+1}, a_n \prec x\} \quad (a_n \in A_n).$$

图 (X, Γ) Γ-有限，但在 x_0 上則不限制扩張，盖任取整数 m，甚易按下法构成一条长为 m 的路：在 A_m 里任取 a_m，然后在 A_{m-1} 里取 a_{m-1} 使 $a_{m-1} \prec a_m$，等等。按推理1，这个图在 x_0 上不有限扩張，因而存在一条无限長的路 $[x_0, a_1, a_2, \cdots]$；点 $a_1, a_2, \cdots$ 等便是推理所要求的点。

定理3 設一个图处处有限，且是連接的，則其頂点的集合和其鏈的集合都可数。

任取一点 x_0，数出自 x_0 出发长度是1的那些鏈及这些鏈的終点，然后再数出长度是2的那些鏈及其終点(未曾数过的点)，等等。因每一頂点总能用自 x_0 出发的一条鏈来达到，故 X 和自 x_0 出发的鏈的集合都可数。

拉多 (Rado) 定理 图 (X, Γ) 处处有限，对应于每一有限整数集合 I，作一有限整数集合 $E(I)$；若在每一有限子图 (A, Γ_A) 上存在函数 $\varphi_A(x)$，取整数值，且使

$$\varphi_A(x) \in E[\varphi_A(\Gamma_A x)] \quad (x \in A),$$

則在 X 上存在函数 $\varphi(x)$，取整数值，且使

$$\varphi(x) \in E[\varphi(\Gamma x)] \quad (x \in X).$$

約定 $\varphi(\Gamma x)$ 表示集合 $I = \{\varphi(y) / y \in \Gamma x\}$。

取有限集合 $A_0\subset X$，继续作集合

$$A_1=A_0\cup\Gamma A_0\cup\Gamma^{-1}A_0,$$

$$A_2=A_1\cup\Gamma A_1\cup\Gamma^{-1}A_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_n=A_{n-1}\cup\Gamma A_{n-1}\cup\Gamma^{-1}A_{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

集合 A_n 是有限的，但逐渐扩大；此外可以假定图是連接的（以免分别考虑每一分图），因有

$$X=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n.$$

用 $\varphi_n=\varphi_{A_n}$ 表示有限集合 A_n 的相应函数；其局限于集合 A_0 上的函数 φ_n^0 是完全确定的，当 n 变的时候，可得有限个这样的函数，由此可知在 n 的无穷个值上 φ^0 完全相同，設 n 的这些值是

$$k_0<k_1<k_2<\cdots.$$

用 φ_n^1 表示函数 φ_{k_n} 局限在集合 A_1 上的函数；根据同样的理由，这个函数 φ_n^1 在 n 的无穷个值上完全相同，設 n 的这些值是

$$l_1<l_2<l_3<\cdots.$$

同样，用 φ_n^2 表示函数 φ_{l_n} 局限在集合 A_2 上的函数，等等……。

函数 $\varphi_0^0,\ \varphi_1^1,\ \varphi_2^2,\ \cdots$ 分别定义于集合 $A_0,\ A_1,\ A_2,\cdots$ 上，且若 $p>q$，則有

$$\varphi_p^p(x)=\varphi_q^q(x)\quad(x\in A_q).$$

由此可以推得对于每一点 $x\in X$，数 $\varphi_n^n(x)$ 在 n 无限加大时，趋向于一个极限 $\varphi(x)$，这也就是在 X 上定义了函数 φ。

对于每一頂点 x_0，总存在一个整数 n，使 $A_n\supset\{x_0\}\cup\Gamma x_0$ 且有

$$\varphi_n^n(x)=\varphi(x)\quad(x\in A_n).$$

因有

$$\varphi(x_0)\in E[\varphi(\Gamma x_0)].$$

証毕

7 序 数 函 数

整数概念可从序数概念推广得来，已为大家所熟知；现在来复述一下它的定义。为了确定思維，考察物件：$x_1, x_2, \cdots, x_{12}$。按这样的顺序，研究这些物件，乃定义出一个12-堵，其中 x_6 的序位，决定于記号：6。

設有一組物件 $x_1, x_2, \cdots$，其个数为无穷，并設这些物件按某一顺序排列，譬如：

$$(x_4, x_5, x_6, \cdots;\ x_1, x_2, x_3).$$

若用寻常的整数表示 $x_4, x_5, x_6, \cdots$ 的序位，则 x_1, x_2, x_3 的序位将无法表出。因此，必須創造新記号来表示这些物件：$\omega+1$ 表示 x_1，$\omega+2$ 表示 x_2，$\omega+3$ 表示 x_3。記号 ω 不再表示序位，它叫做极限序数，記号 $1, 2, \cdots, \omega+1, \omega+2, \omega+3$ 則为序数。

同样，可以定义其他序数；例如取顺序：

$$(x_3, x_5, x_7, x_9, \cdots;\ x_2, x_4, x_6, x_8, \cdots;\ x_1),$$

則 x_8 的序位是 $\omega+4$，x_1 的序位是 $2\omega+1$，等等。設 α，β 是两个这样形式的序数，若具序位 α 的物件，位于具序位 β 的物件之前，則謂 $\alpha<\beta$。

当然，借助于代数概念，序数可以严格地予以定义[1]。

在图論里，序数概念有极大用处，利用这种概念，可将有限图

---

[1] 欲知序数的严格定义，可看 [E. T. F. M.] 第3章。由集合 X 和序列关系 $\leqslant$ 所构成的序对，在 X 的每一子集均有极小时，是一优序集合。两个优序集合 $(X, \leqslant)$ 与 $(Y, \leqslant)$，当存在一个自 X 到 Y 的一一对应关系 σ，且

$$x\leqslant x',\quad \sigma x\leqslant \sigma x';$$

則此二集合称为等价。

序数就是包含一个优序集合的等价类。于此仅指出論斷：序数本身，按关系 $<$ 是优序的。

上的一些論断，推广到无限图上去。

已給图 $G=(X, \Gamma)$，研究集合

$$X(0)=\{x/\Gamma x=\varnothing\},$$
$$X(1)=\{x/\Gamma x\subset X(0)\},$$
$$X(2)=\{x/\Gamma x\subset X(1)\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X(k)=\{x/\Gamma x\subset X(k-1)\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X(\omega)=\bigcup_{\alpha<\omega}X(\alpha),$$
$$X(\omega+1)=\{x/\Gamma x\subset X(\omega)\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

易見这一定义方式，可以延續至无穷：若 α 不是极限序数，取

$$X(\alpha)=\{x/\Gamma x\subset X(\alpha-1)\},$$

若 α 是一个极限序数，則取

$$X(\alpha)=\bigcup_{\beta<\alpha}X(\beta).$$

由此可知若 α 与 β 是两个序数，且 $\alpha<\beta$，則有 $X(\alpha)\subset X(\beta)$.

頂点 x 的級，按定义是满足下二条件的最小序数 α：

$$x\in X(\alpha),$$
$$x\notin X(\beta)\quad 对一切\ \beta<\alpha.$$

因此，記 $\alpha=o(x)$；当然，某些頂点可能沒有級：譬如在一条回路上的那些頂点就沒有級。

函数 $o(x)$ 只能确定于 X 的一个部分上，一般把它叫做图的**序数函数**。

【例 1】 在图 3-2 的图上，每一頂点 x 有級 $o(x)$（已在图里算出）；仅頂点 y 具超限級。按此图，$X=X(\omega+1)$.

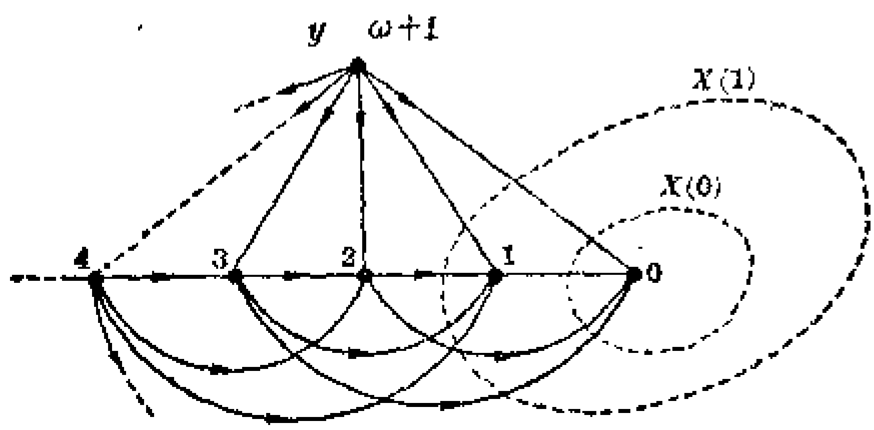


图　3-2

定理 4　当且仅当图是有限扩張的，存在一个确定于 X 上的序数函数。

1°　設 $o(x)$ 存在，往証图是有限扩張的。事实上，若存在一条无限长的路 $a_1, a_2, \cdots$，可証将导致矛盾。

令 $A=\{a_1, a_2, \cdots\}$，則 $A\cap X(0)=\varnothing$.

若对一切序数 $\beta<\alpha$，有 $A\cap X(\beta)=\varnothing$，将有 $A\cap X(\alpha)=\varnothing$，按归納法，乃有

$$A\cap X=\varnothing.$$

于是 $A=\varnothing$，这是矛盾。

2°　反过来，設存在頂点 x 没有級 $o(x)$；令 B 是所有这些頂点的集合，則 $B\neq\varnothing$.

若 $x_1\in B$，則 $\Gamma x_1\neq\varnothing$ [因 $x_1\notin X(0)$]，故在 Γx_1 里存在頂点 $x_2\in B$；同样，在 Γx_2 里存在頂点 $x_3\in B$，等等……。

路 $[x_1, x_2, x_3, \cdots]$ 无限长，故图不可能是有限扩張的。

8　格隆地函数

現在来研究有限图 (X, Γ) 及函数 g，这个函数在每一頂点上对应于一个整数 $g(x)\geqslant 0$. 設对每个頂点 x，值 $g(x)$ 是不在集合

$$g(\Gamma x)=\{g(y)/y\in\Gamma x\}$$

里的最小整数，则 $g(x)$ 称为在所研究的那个图上的格隆地(Grundy) 函数。

由于有了超限序数，便可定义无限图上的格隆地函数如次：$g(x)$ 是不在集合

$$\{g(y)/y\in\Gamma x\}$$

里的最小序数。

由定义可知，若 $\Gamma x=\varnothing$，必有 $g(x)=0$。

一个图可能没有格隆地函数(例如图里有环存在)，但也可能有很多这样的函数。

【例1】 图 3-3 里的图有两个格隆地函数，函数的值是記在相应点旁边的那些整数。甚易驗証，若 $\Gamma x=\{y_1, y_2, \cdots\}$，$g(x)$ 便是异于 $g(y_1)$，$g(y_2)$ … 的最小整数。

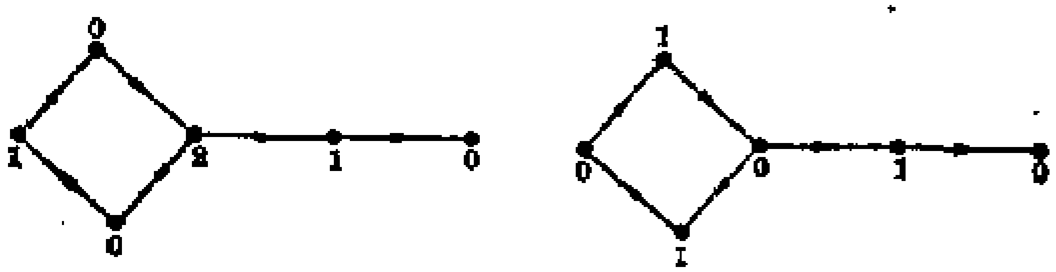


图 3-3

【例2】 图 3-2 里的图有格隆地函数 $g(x)=o(x)$，这个函数在 y 上取超限值。

定理5 若图是有限扩張的，则这个图仅有一个格隆地函数 $g(x)$，且

(1) $$g(x)\leqslant o(x).$$

在集合

$$X(0)=\{x/\Gamma x=\varnothing\},$$
$$X(1)=\{x/\Gamma x\subset X(0)\},$$
$$X(2)=\{x/\Gamma x\subset X(1)\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

上使用归納法，可立即推得定理的証。

定理 6　若 $|\Gamma x|<\infty$，則 $g(x)\leqslant|\Gamma x|$。

若 $g(x)=n$，則 g 在 Γx 上取尽 $0, 1, 2, \cdots, n-1$ 諸值，故 $|\Gamma x|\geqslant n=g(x)$。

定理 5 与定理 6 表明，$g(x)$ 不易取很大的值，尤其在 Γ-有限或限制扩張的图上，$g(x)$ 的值总是有限的。

9　图的运算

現在来研究 n 个图 $G_1=(X_1, \Gamma_1)$，$G_2=(X_2, \Gamma_2)$，$\cdots$，$G_n=(X_n, \Gamma_n)$，及由下二式定义的图 $G=(X, \Gamma)$：

(1) $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$

$=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n)/x_1\in X_1;$等等$\}$ (X_i 的序积)。

(2) $\Gamma(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\Gamma_1 x_1\times\Gamma_2 x_2\times\cdots\times\Gamma_n x_n$。

这样的图記作 $G=G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$，称为图 G_i 的积。

同样，图 G_i 的和，是由下二式定义的图 (X, Γ)：

(1) $X=X_1\times X_2\times\cdots, \times X_n$，

(2) $\Gamma(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$=[\Gamma_1 x_1\cup\{x_2\}\cup\cdots\cup\{x_n\}]\cup[\{x_1\}\cup\Gamma_2 x_2\cup\cdots\cup\{x_n\}]$

$\cup\cdots\cdots\cup[\{x_1\}\cup\{x_2\}\cup\cdots\cup\Gamma_n x_n]$[1]。

这样的图記作 $G=G_1+G_2+\cdots+G_n$。

适所定义的运算 $\times$ 与 $+$，在博奕論里是众所熟知的；在图論牵涉在内的許多領域里，这两种运算也同样經常遇到。

【例 1】有两部机器，設第一部机器有多种性能，这些性能所成的集合表为 X_1，若性能 x_1' 可以續在性能 x_1 之后，則令 $x_1'\in\Gamma_1 x_1$，这样便定义出一个

[1] 应作 $\Gamma(x_1, x_2, \cdots, x_n)=[\Gamma_1 x_1\times\{x_2\}\times\cdots\times\{x_n\}]\cup[\{x_1\}\times\Gamma_2 x_2\times\cdots\times\{x_n\}]\cup\cdots\cup[\{x_1\}\times\{x_2\}\times\cdots\times\Gamma_n x_n]$。——譯者注

图 $G_1=(X_1, \Gamma_1)$；同样，对于第二部机器，可以定义出图 $G_2=(X_2, \Gamma_2)$。

一个工人，不管那一部机器，他都能使用，实际上将面临由第一部机器的性能 x_1 与第二部机器的性能 x_2 所形成的情况 (x_1, x_2)。若这个工人可同时开动这两部机器，则这些情况所构成的图便是 $G_1\times G_2$。若这个工人在同一个时間内只能开动一部机器，则这些情况所构成的图便是 G_1+G_2。

图的运算是不是仍保持有格隆地函数这样的性质呢？在接触这个問題之前，須定义概念序数的**数位和**。任給整数 c，所謂这个数的**二展开**，就是数 c^i 的一个序列 $(c^1, c^2, \cdots, c^k)$（这些数的值不外是零或一），使

$$c=c^1+2c^2+4c^3+\cdots+(2)^{k-1}c^k.$$

这式經常写成

$$c=c^kc^{k-1}\cdots c^2c^1.$$

这种二进位記数法和十进位記数法相似，且两种記数法間的对应关系也易于建立：

十进位記数法		二进位記数法		二展开	十进位記数法		二进位記数法		二展开
0	=	0	=	(0)	6	=	110	=	(0, 1, 1)
1	=	1	=	(1)	7	=	111	=	(1, 1, 1)
2	=	10	=	(0, 1)	8	=	1000	=	(0, 0, 0, 1)
3	=	11	=	(1, 1)	9	=	1001	=	(1, 0, 0, 1)
4	=	100	=	(0, 0, 1)	10	=	1010	=	(0, 1, 0, 1)
5	=	101	=	(1, 0, 1)	11	=	1011	=	(1, 1, 0, 1)

在算术里 $[n]_{(2)}$ 或"n 模 2"表示 n 被 2 除所得的余数（等于零或一）。

按定义，整数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的数位和，是一个整数

$$c=c_1\dot{+}c_2\dot{+}\cdots\dot{+}c_n,$$

这个整数的获得，首先是作出各个整数的二展开 $c_k=(c_k^1, c_k^2, \cdots)$，然后作

$$c=\left(\left[\sum_{k=1}^{n}c_k^1\right]_{(2)},\left[\sum_{k=1}^{n}c_k^2\right]_{(2)},\left[\sum_{k=1}^{n}c_k^3\right]_{(2)},\cdots\right).$$

据此，有

$$3\dot{+}7=(1,1)\dot{+}(1,1,1)=(0,0,1)=4,$$

$$1\dot{+}3\dot{+}11=(1)\dot{+}(1,1)\dot{+}(1,1,0,1)$$
$$=(1,0,0,1)=9,\text{ 等等。}$$

这些概念，甚易推广到超限序数上来。例如 $\alpha=4\omega^2+3\omega+7$ 的二展开，是等于零或一那些数的一个有序集合 $(c^1, c^2, \cdots; c^{\omega+1}, c^{\omega+2}, \cdots)$，这个集合按下述方式来构成：头一組数(自 c^1 到 $c^{\omega+1}$)是7的二展开，再在其后加上无穷个零，第二組数(自 $c^{\omega+1}$ 到 $c^{2\omega+1}$)是3的二展开，再在其后加上无穷个零，第三組数则是4的二展开(其后各项全是零，略去不記)；因此

$$4\omega^2+3\omega+7=(1,1,1,0,0,\cdots;\ 1,1,0,0,\cdots;\ 0,0,1).$$

序数数位和的形成，象有限数一样，乃将相应位置各项模2相加；超限序数的数位和，甚易借助于有限数数位加法表来求得；例如：

$$(3\omega+1)\dot{+}(7\omega+3)\dot{+}11$$
$$=(3\dot{+}7)\omega+(1\dot{+}3\dot{+}11)=4\omega+9.$$

定理7 数位和 $\dot{+}$ 具下列特性：

(1) 結合性 $(\alpha\dot{+}\beta)\dot{+}\gamma=\alpha\dot{+}(\beta\dot{+}\gamma)$,

(2) 存在一个中性元素0，满足：$\alpha\dot{+}0=\alpha$,

(3) 对每一元素 α，存在一个元素 $(\dot{-}\alpha)$，满足：$\alpha\dot{+}(\dot{-}\alpha)=0$,

(4) 可易性 $\alpha\dot{+}\beta=\beta\dot{+}\alpha$.

(按代数語言，头三条性质表明序数构成一个"群"，第四条性质则表明这个群是"可易的"。)

(显然)

推理 設 α 与 β 是二已知序数，必存在且仅存在一个序数 x，

使 $\alpha \dot{-} x = \beta$。

这是群论里一条著名性质，取 $x = (\dot{-}\alpha) \dot{+} \beta = \beta \dot{-} \alpha$ 即得。

定理 8 若图 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 有格隆地函数 $g_1, g_2, \cdots, g_n$，则和图 $G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$ 必也有格隆地函数 g，其在 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 上的值，由数位和

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g_1(x_1) \dot{+} g_2(x_2) \dot{+} \cdots \dot{+} g_n(x_n)$$

给定。

现在来証明如此定义于 $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 上的函数 $g(x)$ 确是和图 $G = (X, \Gamma)$ 的格隆地函数。

1° 对于每一序数 $\beta < g(x)$，在 Γx 里总存在顶点 y，使 $g(y) = \beta$。

事实上，考察以下各二展开：

$$g_k(x_k) = (c_k^1, c_k^2, \cdots),$$

$$g(x) = (c^1, c^2, \cdots), \text{ 其中 } c^r = \Big[\sum_{k=1}^{n} c_k^r\Big]_{(2)},$$

$$\beta = (\beta^1, \beta^2, \cdots), \text{ 其中 } \beta < g(x)。$$

設 r 是使 $\beta^r \neq c^r$ 的最大序数[这样的 r 是存在的，因 $\beta \neq g(x)$]；因 $\beta < g(x)$，故

$$\beta^r = 0, \quad c^r = \Big[\sum_{k=1}^{n} c_k^r\Big]_{(2)} = 1,$$

在 $c_1^r, c_2^r, \cdots, c_n^r$ 中至少有一个等于 1，設 $c_1^r = 1$。令

$$d^s = \begin{cases} c_1^s & \text{当 } \beta^s = c^s, \\ [c_1^s + 1]_{(2)} & \text{当 } \beta^s \neq c^s. \end{cases}$$

在 $\Gamma_1 x_1$ 中将有一个顶点 y_1，使 $g_1(y_1) = (d^1, d^2, \cdots)$，遂有

$$g(y_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) = g_1(y_1) \dot{+} g_2(x_2) \dot{+} \cdots \dot{+} g_n(x_n) = \beta.$$

2° 在集合 Γx 里，不存在顶点 y，使 $g(y) = g(x)$。

事实上，考察顶点 $y = (y_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$，其中 $y_1 \in \Gamma_1 x_1$，且取

$$g_1(y_1)=(d^1;\ d^2,\ \cdots).$$

因 $g_1(y_1)\neq g_1(x_1)$，对某一数 r，将有 $d^r\neq c_1^r$，故

$$[d_1^r+c_2^r+c_3^r+\cdots+c_n^r]_{(2)}\neq[c_1^r+c_2^r+\cdots+c_n^r]_{(2)},$$

因而 $g(y)\neq g(x)$.

这一结果，給出計算和图格隆地函数的規律，在以下各章，相当重要。

第 4 章　图論的基本数据

10 腑数

本章所要定义的概念是无向的：我們只談边而不談弧。为了更一般起見，我們將不研究图，而研究多重图。所謂多重图 (X, U)，按定义是一个集合对，由頂点集合 X，及連接这个集合里某些頂点对的边的集合 U 所构成。但这与图又有所不同，在多重图里連接同一頂点对，可能有很多条不同的边。

在很多問題里，宁可使用多重图，較之使用图，要方便得多。

【例 1】 **化学** 一个分子，可用一个多重图來表示，其頂点用相应的元素符号記出。（图論就是这样被波立亚（Polya）[4] 用到有机化学上，來計算化合物的同分异构体。）我們称乙烯是一个 2-图，乙炔是一个 3-图，等等。

乙烯　　　　　　乙炔

图 4-1

現在來研究一个多重图 G，它具 n 个頂点，m 条边，p 个連接的分图。令

$$\rho(G) = n - p,$$

$$\nu(G) = m - \rho(G) = m - n + p.$$

$\nu(G)$ 定义为多重图 G 的腑数。其特性是很重要的。

定理 1 設 G 是一个多重图，G' 是另一多重图，它由于在 G 的二頂点 a 和 b 間加連一条新边得來；若 a 和 b 相合，或由 G 的一条鏈相連，則

$$\rho(G')=\rho(G),\quad \nu(G')=\nu(G)+1;$$

在相反的情况，則有

$$\rho(G')=\rho(G)+1,\quad \nu(G')=\nu(G).$$

（显然）

推理　恒有 $\rho(G)\geqslant 0$, $\nu(G)\geqslant 0$.

事实上，去掉 G 的边，保留 G 的顶点，使点点孤立，从这样的图出发，一边一边地加上去以作出 G；一开始，$\rho=0$, $\nu=0$；每增加一边，若 ρ 加大，则 ν 維持不变，若 ν 加大，則 ρ 維持不变；无論怎样，ρ 和 ν 都是逐渐加大的。

以下，为了方便起見，将使每一个圈按下面的办法，和一个向量等同起来：多重图的每条边，都任意給定一个方向，若圈 μ 按已給的方向过 u_k 边 r_k 次，而按相反的方向过 u_k 边 s_k 次，便令 $c^k=r_k-s_k$.（若 u_k 是一个环，可徑取 $s_k=0$.）m 維空間 $\boldsymbol{R}^m$ 里的向量

$$(c^1,\ c^2,\ \cdots,\ c^k,\ \cdots,\ c^m)$$

便是对应于 μ 的向量圈，記为 $\boldsymbol{\mu}$（若无混淆，即記为 μ）.

若相应的向量，綫性无关，便謂圈 μ, μ', μ'', … 是独立的[1]。这个性质，不因边所选取的方向而有所改变。

于此有

---

[1] 现在来复习一下綫性代数里某些古典定义。設 $\boldsymbol{c}=(c^1,\ c^2,\ \cdots,\ c^m)$ 和 $\boldsymbol{d}=(d^1, d^2, \cdots, d^m)$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 的两个向量，且設 $\alpha\in\boldsymbol{R}$. 取

$$\alpha\boldsymbol{c}=(\alpha c^1, \alpha c^2, \cdots, \alpha c^m),$$
$$-\boldsymbol{c}=(-c^1, -c^2, \cdots, -c^m),$$
$$\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=(c^1+d^1, c^2+d^2, \cdots, c^m+d^m),$$
$$\boldsymbol{0}=(0, 0, \cdots, 0).$$

集合 $E\in\boldsymbol{R}^m$ 若有性质

$$\alpha\in\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{c}\in E \Rightarrow \alpha\boldsymbol{c}\in E,$$
$$\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d}\in E \Rightarrow \boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}\in E,$$

E 便是一个向量子空間。

若　　$\alpha_1\boldsymbol{c}_1+\alpha_2\boldsymbol{c}_2+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{c}_k=0 \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0,$

定理 2 多重图的腑数 $\nu(G)$ 等于独立圈的最大个数。

事实上，去掉 G 的边，保留 G 的頂点，使点点孤立，然后一边一边地加上去，以作出多重图 G。按定理 1，若一边的增加构成一个圈，腑数便加大一个单位，在相反的情况，这个数没有改变。設在增加边 u_k 之前，已得諸圈的一个基底：$\mu_1, \mu_2, \cdots$，而在增加边 u_k 之后，又新构成了許多圈：$\nu_1, \nu_2, \cdots$。显然，ν_1 不能用 μ_i 綫性表示（因 $\nu_1^k \neq 0$，可是 $\mu_1^k = \mu_2^k = \cdots = 0$），但向量 $\nu_2, \nu_3, \cdots$ 却能用 $\nu_1, \mu_1, \mu_2, \cdots$ 綫性表示。总之，腑数每增加一个单位，綫性无关圈的最大个数便也增加一个单位。因此，恰有所述的結論。

推理 1 当且仅当 $\nu(G)=0$，图 G 沒有圈。

推理 2 当且仅当 $\nu(G)=1$，图 G 仅有一个圈。

定理 3 在一个严格連接的图上，腑数等于綫性无关的回路的最大个数。

事实上，研究由图 G 不同的弧所构成的 2-图（无向的）及一个初級圈 μ，圈 μ 所經过的頂点，可以分成三类：一类 S，在这类点上，μ 的一条弧外向經过，而另一条弧内向經过；一类 S'，在这类点上，μ 的两条弧都外向經过；第三类 S''，在这类点上，μ 的两条弧都内向經过。終点的个数是等于起点的个数的，因有 $|S'| = |S''|$；

便謂 R^m 的向量 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 是綫性无关的。

在相反的情况，若 α_i 不全为零，而有 $\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_k c_k = 0$，則称这些向量是綫性相关的。若 $\alpha_1 \neq 0$，可书

$$c_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} c_2 - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} c_k.$$

这时也称 c_1 可用 $c_2, c_3, \cdots, c_k$ 来綫性表示。所謂向量子空間 E 的底，乃 E 的一个向量集合 $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$，$E$ 的所有向量統可用这些向量 e_i 綫性表示。最小的数 k，便是 E 的維数。

在 $E=R^m$，下列向量构成一个底：

$$e_1 = (1, 0, \cdots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \quad \cdots, \quad e_m = (0, \cdots, 0, 1).$$

故可設 $x_1', x_2', \cdots, x_k'$ 是 S' 的点，$x_1'', x_2'', \cdots, x_k''$ 是 S'' 的点。

在圈 μ 上，S' 的元素和 S'' 的元素是相間的，因此可設在 x_i' 之后所能遇到的不在 S 里的第一个点是 x_i''；最后，設 μ_0 是經过頂点 y 之前經过頂点 x 的一条路，用 $\mu_0[x, y]$ 来表示自 x 走向 y 的那条部分路。因图是严格連接的，恒存在一条回路，經过 x_{i+1}' 与 x_i''，且用 μ 的弧以自 x_{i+1}' 走向 x_i''。圈 μ 便是这些回路的一个綫性組合，盖圈 μ 可以改写为

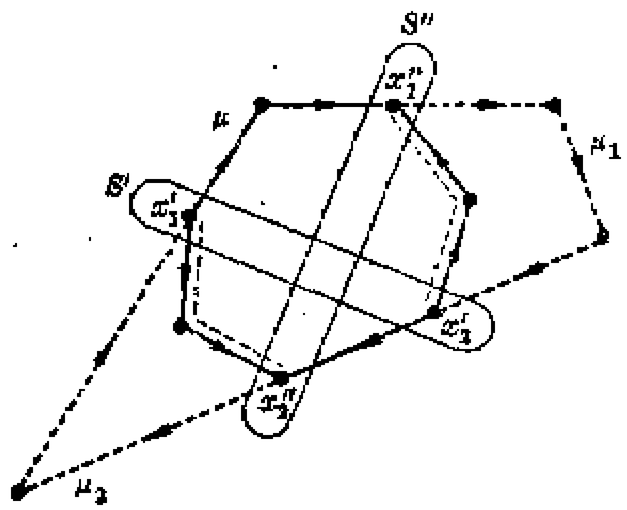


图 4-2

$$\mu = \mu[x_1', x_1''] - \mu_1[x_2', x_1''] + \mu[x_2', x_2''] + \cdots$$
$$= \mu[x_1', x_1''] + \mu_1[x_1'', x_2'] + \mu[x_2', x_2''] + \mu_2[x_2'', x_3'] + \cdots$$
$$- (\mu_1 + \mu_2 + \cdots).$$

由此，每一初級圈是回路的綫性組合，因而任意的圈都如此（任一圈是初級圈的綫性組合）。

在空間 $\boldsymbol{R}^m$ 里，所有的回路，組成圈所成的向量子空間的一个底，按定理 2 这样的底是 $\nu(G)$ 維的，故綫性无关的回路的最大个数是 $\nu(G)$。

11 色 数

已給正整数 p，若可能用 p 种不同的顏色，涂染 G 的所有頂点，使相邻的頂点統具不同的顏色，則这样的图，叫做是 **p-色的**。使一个图是 p-色的那个最小的数 p，叫做图的**色数**，記为 $\gamma(G)$。

【例 1】 **地图** 在平面上画出国家集 X 的一張地图，且当国家 x 与 y 有共同的边界时，取 $(x, y) \in U$。图 (X, U) 是对称的，且具另一重要性质：即

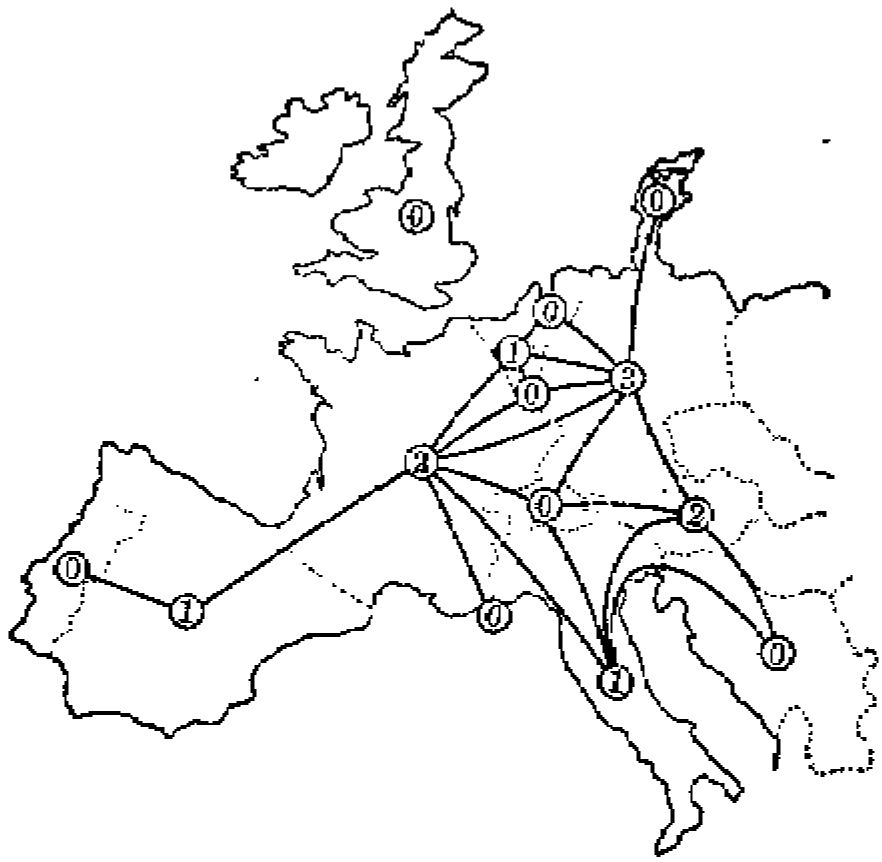


图4-3 4色地图。(颜色0，1，2，3的选择，对应于用粗线表出的对称平面图里格隆地函数的值；此外，颜色"0"的那些顶点，构成能用同一种颜色涂染的点的最大集合。)

可以将这个图画在平面上，而没有两边相交(顶点除外)。这样的图称为平面的，已知平面图的色数小于或等于5(見第21章)：因此，5种颜色即足以画出一張地图，而使相邻的区域都具不同的颜色。

整数q具下列性质的，称为图的**色級**：

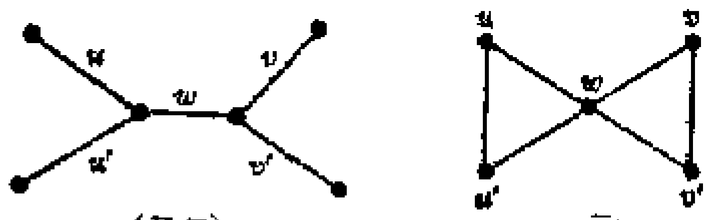
1° 可以用q种不同的颜色，涂染图的每一边，使相邻的边都具不同的颜色。

2° 上面的情况，不可能用$q-1$种颜色来达到。

一个图(X, U)的色級，就是按下法定义的图(U, Γ)的色数：其顶点是原图的边，若u与u'在原图上相邻，便取$u'\in\Gamma u$(見图4-4)。

由此，色級的确定，乃回到色数的研究。

以下将給出有关色数的某些基本論断。



(X, U)　　　　$(U, \bar{\Gamma})$

图 4-4

寇尼希定理　当且仅当一个图不含奇数长的圈时，这个图是2-色的。

(1) 現在来考察一个沒有奇数长的圈的图(X, U)，往証这个图是2-色的。可以假定所研究的图是連接的(設不如此，可以分別研究它的連接分图)。現在便来按照下面的办法，一个一个地涂染所有的頂点：

1° 先将任一点 a 染以藍色；

2° 設某一頂点 x 已染成藍色，便将和 x 相邻的頂点，染以紅色，若某一頂点 y 已染成紅色，便将和 y 相邻的頂点染以藍色。

因图是連接的，每一頂点，迟早总会染上顏色，且一个頂点 x，不可能同时染上紅色又染上藍色，否則 x 和 a 将位于一个奇数长的圈上。因此，原給的图确是2-色的。

(2) 若图是2-色的，很显然这个图不可能包含奇数长的圈，蓋在这样的圈上，其頂点不可能用两种顏色，按照上述方法，加以涂染。

〔注〕 下二性质是等价的：

(1) 图 G 沒有奇数长的圈；

(2) 图 G 沒有奇数长的初級圈。

事实上，(1) ⇒ (2)；为了証明 (2) ⇒ (1)，假定存在一个圈 $\mu = [x_0, x_1, \cdots, x_p = x_0]$，其长 p 是奇数。每当发現两个頂点 x_j 和 x_k，具性质 $j < k < p$ 与 $x_j = x_k$ 时，即将圈 μ 分成两个部分圈 $\mu[x_j, x_k]$ 与 $\mu[x_0, x_j] + \mu[x_k, x_0]$，其中一个圈必是奇数长的(否則 μ 将是偶数长的)。

只要可能，我們就将圈 μ 按照这种方式一直分解下去，其中奇数长的圈总存在；但最后所得到的圈却都是初級的，这和(2)相違。

由于这些結果，甚易識别 2-色图，但对其他的图，则还沒有純图性质的方法，来确定它們的色数。然应予指出者，在很多情况，格隆地函数确体现为一个有效的工具，其所以如此，实由于下面的定理：

定理 4 設 G 是一个图，假定它是对称的，G 为 p-色的充分和必要条件乃这个图有一个格隆地函数 $g(x)$，具下列性质：

$$\max_{x\in X} g(x) \leqslant p-1.$$

1° 若有这样的函数 $g(x)$ 存在，图便是 p-色的。事实上，只須对应于 0 到 $p-1$ 之間的每一个数，給出一种颜色，而以和值 $g(x)$ 相应的颜色，涂染頂点 x 即得。

2° 設图是 p-色的，往証在 G 上存在格隆地函数 $g(x)$，具极大值 $p-1$（至多）。設 $S_0, S_1, \cdots, S_{p-1}$ 是有相同颜色的点的不同集合。每一点 $x\in S_k$, $k\geqslant 1$, 不和 S_0 里任一点相邻时，将其加到 S_0 里去，使 S_0 变为 $\bar{S}_0\supset S_0$. 按相同方法，每一点 $x\in S_k-\bar{S}_0$, $k\geqslant 2$, 不和 $S_1-\bar{S}_0$ 里任一点相邻时，加到 $S_1-\bar{S}_0$ 里，构成集合 $\bar{S}_1$. 同样，定义 $\bar{S}_2$，然后 $\bar{S}_3$，等等……。

函数 $g(x)$，当 $x\in \bar{S}_k$，其值为 k，便是 G 上的一个格隆地函数，满足問題的要求。

寻求色数的途徑

現在来研究具 n 个頂点 m 条边的图 G；为了寻求它的色数，或者使用一种經驗方法，这个方法簡单，可以直接应用，但不一定常常有效；或者使用一种解析方法，系統地求得一个解，但这种方法，一般須用电子計算机。

經驗方法，乃自一个具有颜色 1, 2, …, p 的任意着色开始，

然后研究在这些颜色中，逐渐去掉一种颜色（称之为"鉴别的颜色"）。为此，可考察具这种鉴别颜色的一点 x，并考察非鉴别的两种颜色 j 与 k 所成子图的所有連接分图 $C_1^{jk}, C_2^{jk}, \cdots$。若集合 $C_1^{jk}\cap\Gamma x$, $C_2^{jk}\cap\Gamma x$ 等統非两色的，即可改变点 x 的颜色：取 $C^{jk}\cap\Gamma x$ 是 j 色的每个分图 C^{jk}，在这些分图里，对調颜色 j 与 k（其他各点颜色不变），最后将顶点 x 涂成 j 色（这点乃不与任何 j 色的点相邻）。

解析方法乃解析地驗証图 G 是否可用 p 种颜色加以涂染；对应于 p 种颜色的每种涂染方法，实际上可按下法作出 ξ_q^i（在此，$i=1, 2, \cdots, n$; $q=1, 2, \cdots, p$）：

$$\xi_q^i\begin{cases}=1 & \text{若顶点 } x_i \text{ 是 } q \text{ 色的,}\\ =0 & \text{若顶点 } x_i \text{ 不是 } q \text{ 色的。}\end{cases}$$

取

$$r_j^i\begin{cases}=1 & \text{若边 } u_j \text{ 取 } x_i \text{ 作为一个端点,}\\ =0 & \text{若边 } u_j \text{ 不取 } x_i \text{ 作为一个端点。}\end{cases}$$

問題于是回到寻求整数 ξ_q^i，滿足以下条件：

1° $\xi_q^i\geqslant 0$　　$(i=1, 2, \cdots, n;\ q=1, 2, \cdots, p)$，

2° $\sum\limits_{q=1}^{p}\xi_q^i=1$　　$(i=1, 2, \cdots, n)$，

3° $\sum\limits_{k=1}^{n}r_j^k\xi_q^k\leqslant 1$　$(j=1, 2, \cdots, m;\ q=1, 2, \cdots, p)$.

由此，得一**綫性不等方程組**，利用平常的綫性規划方法，甚易驗証其是否可行；不过这里須驗証这組不等方程是否具有**整数解**，直到最近，才創造出一种系統的方法，来求这样的解[1]。

現在来研究两个不同的图 G 与 H；要求确定它們的和 $G+H$

---

[1] 这个系統方法，是高莫鋭（R. E. Gomery）在但威西（G. Dantzig）单純形法的基础上創造出来的，在形式上还不十分完备。大体上，这个方法，首先确定一般綫性規划的一个解，假使这个解里，某一变量的值不是整数，推出一組新的綫性方程，它以所要寻求的整数解为解，而不以已求得的为解。

或积 $G\times H$(見第3章)的色数。于此,有以下結論:

定理 5 設 G 是 $(p+1)$-色的图,H 是 $(q+1)$-色的图,r 表示数位和 $p'\dotplus q'$ $(p'\leqslant p,\ q'\leqslant q)$ 中最大的,則图 $G+H$ 是 $(r+1)$-色的。

事实上,我們可以假定图 G 和 H 是对称的(这样,对于 $G+H$ 的边并无改变),按前一定理,在图 G 上作格隆地函数 $g(x)$,其极大值为 p,在图 H 上作格隆地函数 $h(x)$,其极大值为 q。按第3章定理8,图 $G+H$ 将有极大值为 r 的格隆地函数,这便是定理所要証的。

根据这个定理,讀者甚易驗証,若 G 是 6-色的,H 是 7-色的,图 $G+H$ 便是 8-色的,盖

$$r=6\dotplus 1=(1,\ 1,\ 1)=7.$$

定理 6 設 G 与 H 是两个不同的图,其色数分别是 p 与 q,且假 $r=\min\{p,\ q\}$,則图 $G\times H$ 是 r- 色的。

为了确定思維,設 $p\leqslant q$,并将图 G 用 p 种颜色加以涂染。在图 $G\times H$ 上,点 $\xi=(x,\ y)$ 涂以点 x 在 G 里的顏色,图 $G\times H$ 的邻点,必具不同的顏色(盖若不然,图 G 的邻点将具相同的顏色)。定理得証。

这个定理也可以写成

$$\gamma(G\times H)\leqslant\min\{\gamma(G),\ \gamma(H)\}.$$

12 內 固 数

現在研究图 $G=(X,\ \Gamma)$;設集合 $S(\subset X)$ 的任二頂点都不相邻,換句話說,即

$$\Gamma S\cap S=\varnothing,$$

則称 S 是內固的。

命 $\mathscr{S}$ 表示图的一切內固集合所成的族,显有

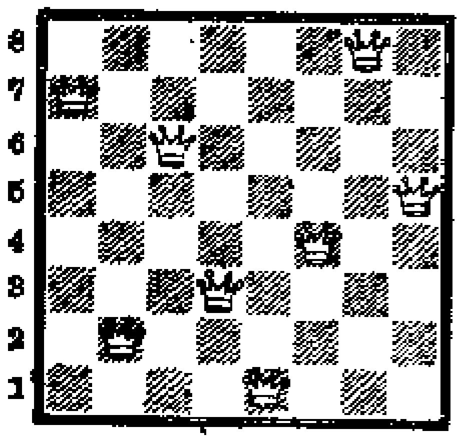
$$\varnothing \in \mathscr{S},$$
$$S \in \mathscr{S},\ A \subset S \Rightarrow A \in \mathscr{S}.$$

按定义，图 G 的内固数是

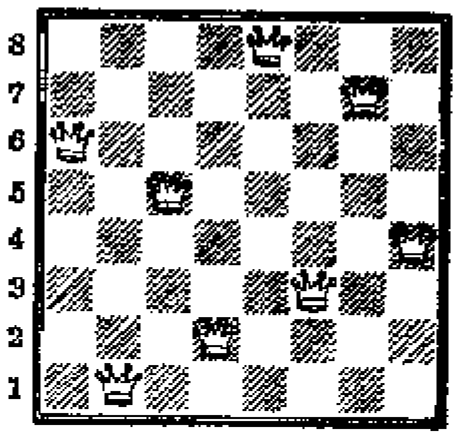
$$\alpha(G)=\max_{S\in\mathscr{S}}|S|.$$

【例 1】（高斯）八后問題　在下棋游戏里，能不能将八个皇后，分布在棋盘上，使誰也不能吃誰？这个問題，实际上可以归結成这样的問題，即对具 64 个頂点（棋盘上的方格）的对称图，求其极大内固集合，在此，若方格 x 和 y 在同一直綫或同一斜綫上，則 $y\in\Gamma x$。起初研究这个問題，困难是很大的，高斯认为这个問題有 76 个解，直到1854 年，在柏林的象棋杂志（Schachzeitung）上，不同的作者，共只发表了 40 个解。这个問題实际有 92 个解，其中的 12 个，表列如下：

(72631485)	(61528374)	(58417263)
(35841726)	(46152837)	(57263148)
(16837425)	(57263184)	(48157263)
(51468273)	(42751863)	(35281746)



(72631485)



(61528374)

图 4-5

对应于每一个这样的排列，象在图 4-5 那样，有一个图解，自每一图解，可以导出八个不同的解，其中四个，由旋轉一周的四分之一得来，其他四个，則由对主对角綫对称得来。仅在最后一列(35281746)，旋轉半周所得到的图解，和原图完全一样，故所得的解不超过四个。

【例 2】 对称图的一个幫集，是一个集合 $C\subset X$，具下列特性：

$$x\in C,\quad y\in C\ \Rightarrow\ y\in \Gamma x,$$

設 X 是一帮人的集合，而 $y\in\Gamma x$ 表示 x 和 y 二人之間有亲密关系，欲求一个极大的帮集，意即要找出一个有最多人数的联盟。考察由下式定义的映象 Γ'：

$$y\in\Gamma' x\ \Leftrightarrow\ y\notin\Gamma x,$$

則这个問題便归結为寻求图 (X,Γ') 的一个最大内固集。

【例 3】 少女問題　这个問題构成很多数学研究的对象，可以說明如次：一个寄宿学校，受托完成对 15 个少女的教育，这些少女記为 $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o$；她們每天須三个一排在操場上鍛炼，問是否可能，在連續七天的鍛炼里，其中任二人最多只相邻一次？

由于考虑到对称，凱萊(Cayley)找出下面的解：

星期天	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
afk	abe	alm	cdo	cgn	ahj	aci
bgl	cno	bcf	bik	bdj	bmn	bho
chm	dfl	deh	cjl	cek	cdg	dkm
din	ghk	gio	egm	fmo	efi	eln
ejo	ijm	jkn	fhn	hil	klo	fgj

少女問題和另一同样著名的問題紧密联系，这个問題称为**輔助問題**：是否可能将十五个少女，組成 35 个不同的 3-組，使其中任二少女，在这些 3-組中，最多只同时出現一次？为了解决輔助問題，只須构造一个图 G，其頂点是 455 个可能的 3-組，任二 3-組，設有两个少女相同，这二 3-組便相連接；因此，只須寻求一个极大内固集。于此，有 $\alpha(G)\leqslant 35$，盖同一少女，最多只能出現在 7 个不同的这样 3-組中，这样的 3-組，其总数最多是 $15\times 7\times\frac{1}{3}=35$，每一具 35 个 3-組的内固集，便是极大的。

为了考察輔助問題的一个解，是否相应于少女問題的一个解，可作图 G'，其頂点是选定的 3-組，两个 3-組若有一个共同的少女，这二 3-組便相連接，若色数 $\gamma(G')$ 等于 7，少女問題便已解决，若 $\gamma(G')>7$，則須选擇另一 3-組集合。甚易驗証确实存在輔助問題的某些解，它們不是少女問題的解。

〔注 1〕 色数 $\gamma(G)$ 和内函数 $\alpha(G)$ 由下列不等式相联系：

$$\alpha(G)\cdot\gamma(G)\geqslant n,$$

事实上，可将 X 分成 $\gamma(G)$ 个内固集合，每个集合由同色的頂点所构成，設这些集合分别有 $m_1, m_2, \cdots, m_\gamma$ 个頂点，則

$$n=m_1+m_2+\cdots+m_\gamma\leqslant\alpha(G)+\alpha(G)+\cdots+\alpha(G)=\gamma(G)\cdot\alpha(G).$$

〔注2〕 这两种概念之間的联系，不那么十分紧密，通过下面的办法，是不能找到色数的：首先，用一种顏色(1)涂染极大内固集 S_1，然后用一种顏色(2)涂染子图 $X-S_1$ 的极大内固集 S_2，然后再用一种顏色(3)涂染所余子图的极大内固集，等等，这个事实，实在是沒有什么可惊奇的。从图4-6的图即可看到这点(这个图的色数显是4)：所有白色頂点构成唯一的极大内固集，假使用一种顏色加以涂染，則頂点 a, b, c, d 将只能涂上三种顏色，这显然是不可能的。

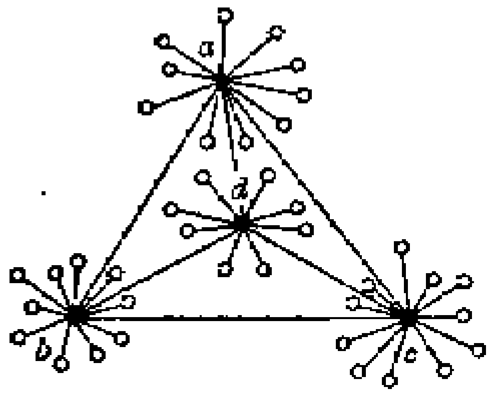


图 4-6

有两个图 G 与 H，往往要求乘积 $G\times H$ 的内固数。

【例4】 **商农 (C. E. Shannon)[5] 信号集合的容量問題** 現在来考察一种极其簡单的情况，一个发报站能发出5种信号 a, b, c, d, e，而在收报站，則每一种信号可以給出两种不同的翻譯：信号 a 可以給出 p 或 q，信号 b 可以給出 q 或 r，…，如图4-7所示。問可能采用的信号的最大个数是多少，使在使用这些信号时，收报站不致发生混淆？这个問題归結为要找图 G (图4-8) 的一个极大内固集 S，图 G 的两个頂点所代表的两个信号可能混淆时，这二点便相邻；取 $S=\{a, c\}$，$\alpha(G)=2$。

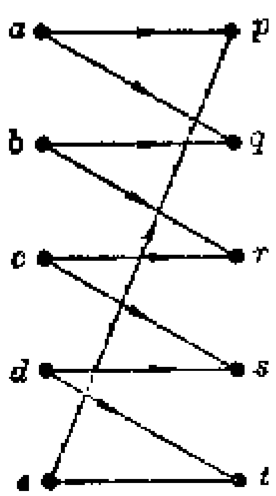


图 4-7

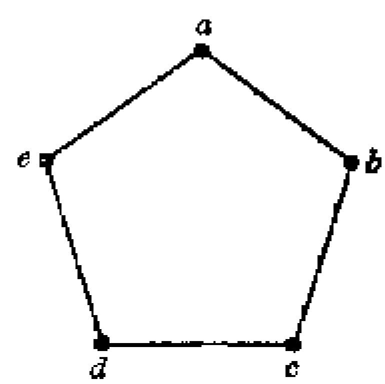


图 4-8

替代一个字母的信号，可用两个字母的"字"，只要这个字在收报站不带来混淆即可。a 与 c 在收报站并不引起混淆，用这两个字母，可以构成格式：aa, ac, ca, cc，照这样的办法，乃得 $[\alpha(G)]^2=4$ 个字。但我們还可以取：aa, bc, ce, db, ed，以形成更为丰富的格式(甚易驗証，这些字里任意两个，在收报站均不引起混淆)。

已給图 $G=(X, U)$ 与 $H=(Y, V)$，图 $G\times H$，其頂点是点对 $xy(x\in X, y\in Y)$，二頂 xy 与 $x'y'$，只要满足下列条件之一，便命这二頂点是連接的：

1° $x=x'$; $(y, y')\in V$,

2° $(x, x')\in U$; $y=y'$,

3° $(x, x')\in U$; $(y, y')\in V$.

这样的图叫做图 G 与 H 的乘积。

(这个定义和第 3 章的定义稍有不同，但这并不导出不同的概念，蓋在图里引进环，便得寻常的图积。) 取图 4–8 的图 G，若字 xy 与字 $x'y'$ 为乘积 $G\times G=G^2$ 的两个邻点，这两个字便可能引起混淆。用两个字母构成字，其不混淆的信号个数是 $\alpha(G^2)=5$。一般地用 n 个字母构成字，其不混淆的信号个数是图积

$$G^n=G\times G\times\cdots\times G$$

的内固数。

引理 1 已給二图 G 与 H，恒有

$$\alpha(G\times H)\geqslant\alpha(G)\alpha(H)。$$

事实上，設 S 与 T 分别是 G 与 H 的极大内固集，序集 $S\times T$ 对于图 $G\times H$ 是内固的，因而

$$\alpha(G\times H)\geqslant|S\times T|=|S|\times|T|=\alpha(G)\alpha(H).$$

这个引理提供下面的定义：数

$$\theta(G)=\sup_n\sqrt[n]{\alpha(G^n)}$$

称为图 G 的**容量**。

显有 $\theta(G)\geqslant\alpha(G)$，以下往証几乎恒有

$$\theta(G)=\alpha(G).$$

商农更証明了图4-8的图 G，是唯一的一个图，其点数少于6，而其 $\theta(G)\neq\alpha(G)$。实际上它的容量还未确定，只知

$$\sqrt{5}\leqslant\theta(G)\leqslant\frac{5}{2}.$$

现在来研究一个自 X 到 X 本身的单值映象 σ，它使每一顶点 x 对应于一个顶点 $\sigma(x)$；若

$$y\neq x,\quad y\notin\Gamma x\Rightarrow\sigma(y)\neq\sigma(x),\quad\sigma(y)\notin\Gamma\sigma(x),$$

称映象 σ 是**保固的**，这样的映象保留一对顶点"相异且不相邻"这种特性。

引理2　保固映象 σ 把一个内固集 S 变换为一个内固集 $\sigma(S)$，且 $|S|=|\sigma(S)|$。

事实上，映象 σ 是单值的，故 $|\sigma(S)|\leqslant|S|$；又映象 σ 是保固的，故 $|\sigma(S)|=|S|$。

引理3　若集合 $\sigma(X)$ 是内固的，则图 G 的内固数是 $\alpha(G)=|\sigma(X)|$。

事实上，若 $\sigma(X)$ 是内固的，便有

$$|\sigma(X)|\leqslant\max_{S\in\mathscr{S}}|S|=\alpha(G).$$

但若 S_0 是一个极大内固集，按引理2，应有

$$|\sigma(X)|\geqslant|\sigma(S_0)|=|S_0|=\alpha(G).$$

于是
$$\alpha(G)=|\sigma(X)|.$$

定理7（商农）　若图 G 或 H 中的一个，經过保固映象 σ 之后，变为内固集，则

$$\alpha(G\times H)=\alpha(G)\alpha(H).$$

这里只须証 $\alpha(G\times H)\leqslant\alpha(G)\alpha(H)$；設 σ 是 G 的保固映象而使 $\sigma(X)$ 内固，并設 σ_0 是由下式定义的 $G\times H$ 到其自身的一个

映象：

$$\sigma_0(x, y)=[\sigma(x), y].$$

映象 σ_0 将两个相异非邻点 $\xi=(x, y)$ 与 $\xi'=(x', y')$ 变为两个相异非邻点 $(\sigma x, y)$ 与 $(\sigma x', y')$，因此，它是保固的。

若 S_0 是 $G\times H$ 的一个极大内固集，按引理 2，有 $\alpha(G\times H)=|S_0|=|\sigma_0(S_0)|$，将 $\sigma_0(S_0)$ 的元素，按其每一个字的第一字母分类，据引理 3，有 $|\sigma(X)|=\alpha(G)$ 个不同的类。但在另一面，$\sigma_0(S_0)$ 的任二元素都不相邻，每一个类至多有 $\alpha(H)$ 个元素，因而

$$\alpha(G\times H)=|\sigma_0(S_0)|\leq\alpha(G)\alpha(H).$$

推理 設图 G 可以通过保固映象 σ 变为一个内固集，则其容量等于其内固数。

事实上，

$$\alpha(G\times G)=[\alpha(G)]^2,$$
$$\alpha(G\times G\times G)=[\alpha(G)]^2\alpha(G)=[\alpha(G)]^3,$$

…………………………………………………………

因而
$$\theta(G)=\sup_n\sqrt[n]{\alpha(G^n)}=\alpha(G).$$

13 外 固 数

已給图 $G=(X, U)$ 及集合 $T(\subset X)$，若对每一頂点 $x\notin T$，有 $\Gamma x\cap T\neq\varnothing$，或 $\Gamma^{-1}T\supset X-T$，則称集合 T 是外固的。

設 $\mathscr{C}$ 表示图的外固集族，則

$$X\in\mathscr{C},$$
$$T\in\mathscr{C},\ A\supset T\ \Rightarrow\ A\in\mathscr{C}.$$

按定义，图 G 的外固数是

$$\beta(G)=\min_{T\in\mathscr{C}}|T|.$$

現在的問題便是要做出一个外固集，具最少个数的元素。

【例1】 看守員問题　在某一仓庫里，每一貯藏物資的庫房各給看守員提供一个崗位，但庫房 x_0 的看守員，同时可以看到庫房 x_1, x_2, x_3 与 x_4 誰在进出，这些庫房是各用一条直廊和庫房 x_0 相連的，如图 4-9 所示。問仓庫所有庫房，最少要几个看守員？解决这个問题，实际上就是要寻求图 4-9 里那个对称图的外固数。在图的設計下，这个問题是很簡单的，它的外固数 $\beta=2$。

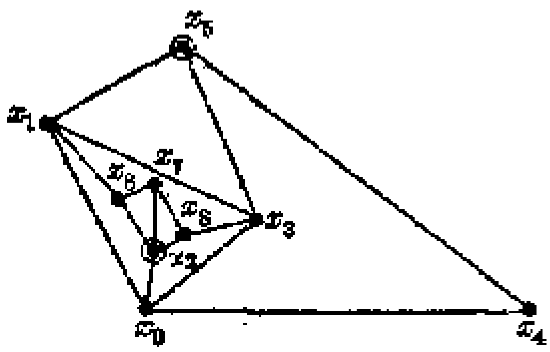
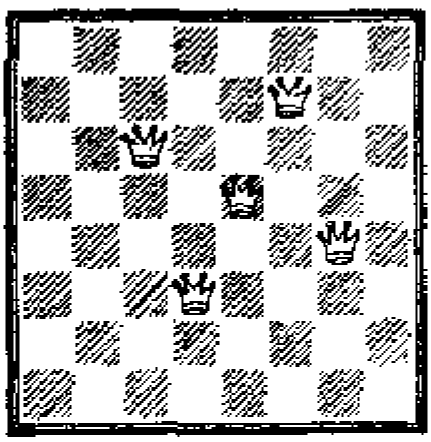


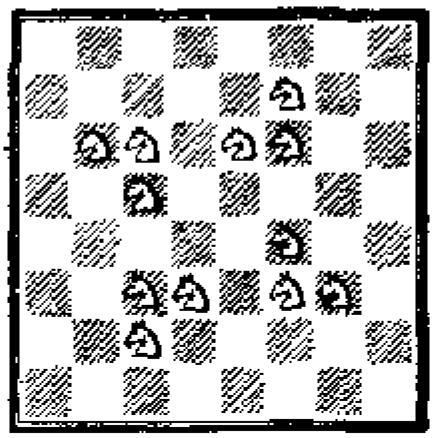
图　4-9

【例2】 五后問题　在走棋游戏里，問在棋盘上安排多少个皇后，才使棋盘上的每一格，至少被一个皇后所控制？这个問题归結为求一个图的极小外固集，这个图共有 64 个顶点（棋盘的格子），而当且仅当 x 和 y 在同一直綫或同一斜綫上，$(x, y)\in U$。

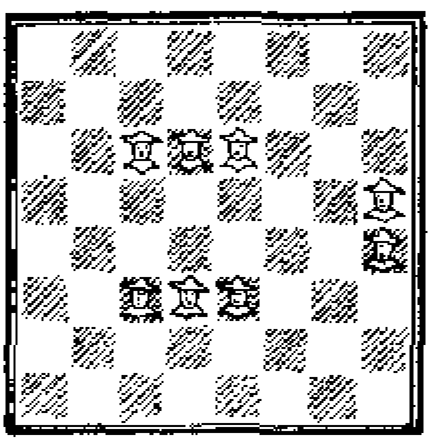
关于皇后，外固数是 $\beta=5$；关于宝塔，$\beta=8$；关于馬，$\beta=12$；关于丑，$\beta=8$。



$\beta(G_1)=5$



$\beta(G_2)=12$



$\beta(G_3)=8$

图　4-10

【例 3】 六个紅盘問题 下面的游戏，对于赶集的人是非常熟习的：一个大白盘子(半徑一个单位)，放在桌子上，要用六个小紅盘子(半徑 $\rho<1$) 将大盘完全盖上，游戏的人将六个小盘陆續掷到大盘上面，但抛掷之后，即不許再移动它的位置。問半徑 ρ 最小是多少，才使这个問題成为可能？

这个問題归結为求一个无限图 (X, U) 的极小外固集 T，在此，X 是白盘上点的集合，且若自 x 到 y 的距离 $d(x, y)<\rho$，则 $(x, y)\in U$。

为了确定一个极大内固集，或一个极小外固集，可以連續研究每个集合 $T\subset X$，驗証其是否满足所提出的条件。当然，这样的消去方法，一般地讲是不切合实际的；因而必須求助于某种法則，即謂須求助于一种簡捷的运算法則，切合于这种計算。(有时可以考虑使用快速电子計算机。)

实际上，为了确定一个极大内固集，我們即将提供一种由最新理論导出的法則(第 10 章二色图的理論，第 18 章一般图的理論)。解决八后問題，如用消去方法，須十小时左右，如采用一个較好的法則，則最多只要三分钟。此外，尚須提起注意的，若将八后在棋盘上去摆，则一个很簡单的理由，可以指出，这种做法并不更好；在更一般的情况，需要一种簡单的判断，来識别内固集是否极大，而能够提供这种判断的只有一个有名的法則。

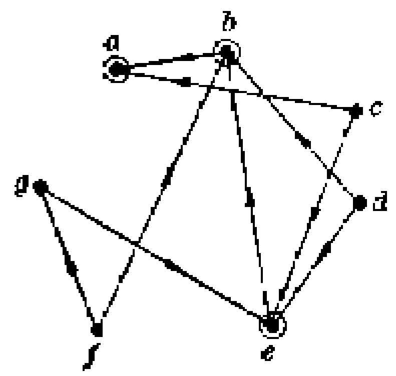


图 4-11

至于极小外固集的寻求，則是一个极为初等的問題，可以按照下面的方式，予以解决：

确定极小外固集的法則 研究图 4-11 的图 $G=(X, \Gamma)$ 作为范例。按下法作自 $X=\{a, b, \cdots\}$ 到

$$\bar{X}=\{\bar{a}, \bar{b}, \cdots\}$$

的映象 Δ： $\bar{y}\in\Delta x \Leftrightarrow y=x$ 或 $y\in\Gamma^{-1}x$。

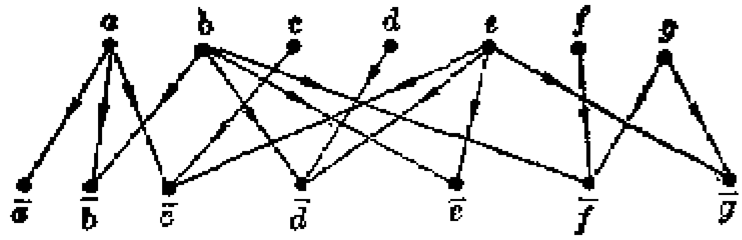


图 4-12

如此，得一偶图，表为$(X, \bar{X}, \Delta)$（图4-12）；若T为G的一个外固集，則$\Delta T=\bar{X}$；反之，若$\Delta T=\bar{X}$，則集合T在G里外固。于是問題归結为在X里求一极小集合T，使$\Delta T=\bar{X}$。

1° 当有某一点$y\neq x$，而$\Delta x\subset\Delta y$，去掉这样的点x，以簡化偶图（事实上，在本問題，点y确能完成点x所应完成的任务）。于此，去掉点c, d, f。

2° 若在偶图上存在悬挂边$(x, \bar{y})$，显有$x\in T$。于此，徑取a属于T。

3° 在偶图里去掉已經选取了的点a，同样，去掉$\Delta a=\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$；得图4-13的图。

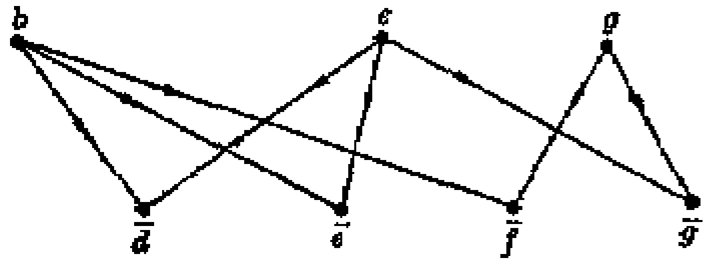


图 4-13

4° 重复象1°那样的簡化，或象2°那样去掉必須属于T的那些点；若不能再作簡化（如本例），即謂图不可約，这时任取一点，使之属于T，譬如取b。

5° 象3°那样去掉点b及$\Delta b=\{\bar{d}, \bar{e}, \bar{f}\}$。

6° 継續簡化如前：在所剩下来的图里，因$\Delta g\subset\Delta e=\{\bar{g}\}$，故去掉点$g$，除点$e$外已不再剩有其他的点，因得$T=\{a, b, e\}$。

若在4°，試用点g或e以替代点b，求得的解，同样滿足原給的条件，但所获并不較优。

第 5 章　图　核

14　存在性和唯一性定理

现在来研究一个有限或否的图 $G=(X, \Gamma)$. 若集合 $S\subset X$ 内固且外固，则謂 S 是图的核。据此，有

(1) $x\in S \Rightarrow \Gamma x\cap S=\emptyset$,

(2) $x\notin S \Rightarrow \Gamma x\cap S\neq\emptyset$.

从条件(1)可以推知核 S 不含环；从条件(2)可以推知核 S 包含所有具性质 $\Gamma x=\emptyset$ 的点 x；但 $\emptyset$ 不是一个核。

【例 1】 (馮・諾曼-莫尔根施退恩 Von Neumann-Morgenstern) 核的概念首先是在博奕論里作为"解"而被引用的。

設有 n 个博奕者，記为(1)，(2)，…，(n)，大家协議，各从集合 X 里选取一个行动 x，若博奕者(i)喜爱行动 a 較 b 为甚，記作 $a\geqslant^i b$，显見 $\geqslant^i$ 是一个全序关系(第 3 章例)。然而这种个人喜爱并不是統一的；因而須引进优越符号 $\succ$。若 a 較 b 更被喜爱，亦即 $a\succ b$，这表示存在一些博奕者认为取 a 較取 b 为优，但这也不过是这批人的一种观点；設又有 $b\succ c$，即存在一些博奕者认为 b 較 c 为优，此二种观点不一定是統一的，因而不能由此推出 $a\succ c$；即謂关系 $\succ$ 不是傳递的[1]。

考察图 (X, Γ)，其中 Γx 表示所有优越于 x 的那些行动。設 S 是图的一个核(假定存在)，馮・諾曼与莫尔根施退恩将博奕的进行，限制于 S 的元素。S 的内固性，表明 S 的任一行动，不能优越于 S 里其他另一行动，而与之保持某种联系；又由于外固性，每一不在 S 里的行动 x，恒能有 S 的一个行动較之优越，而立即将其排除。

【例 2】 考察具格隆地函数 $g(x)$ 的图 (X, Γ)；集合 $S=\{x/g(x)=0\}$ 即

---

[1] 名詞"喜爱"是加尔宝 (G. T. Guilbaud) 所創，他用这样的名詞写作 [2]。馮・諾曼和莫尔根施退恩則使用"优越"这样的概念。"喜爱"的不同的数学結构，見貝尔热 (Berge) [1]第 5 章。

图的一个核，盖

(1) $x\in S \Rightarrow \Gamma(x)\cap S=\varnothing$,

(2) $x\notin S \Rightarrow g(x)\neq 0$, 因而 $\Gamma x\cap S\neq\varnothing$.

【例3】 有些图是沒有核的，讀者可在图5-1的那个图上自行驗証；若一个图有核 S_0，則它的穩固数必滿足

$$\alpha(G)=\max_{S\in\mathscr{S}}|S|\geqslant|S_0|\geqslant\min_{T\in\mathscr{T}}|T|=\beta(G).$$

图5-1上那个图 G 沒有核，蓋

$$\alpha(G)=1<2=\beta(G).$$

图5-2上那个图 G'，則与此相反，共有两个核 S' 与 S''.

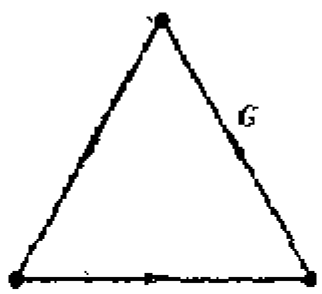


图 5-1

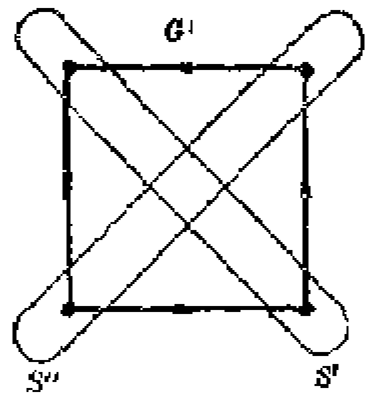


图 5-2

下面将往寻求一种判断，以識別一个图是否有核，以及这个核是否是唯一的。

定理1 設 S 是图 (X, Γ) 的核，則集合 S 是內固集族 $\mathscr{S}$ 的一个极大集，即謂

$$A\in\mathscr{S},\quad A\supset S \Rightarrow A=S.$$

設 A 是包含核 S 的一个內固集，且設 A 眞正包含 S，茲往証这将导致矛盾。事实上，在这种情况，将存在頂点 a, $a\in A$，而 $a\notin S$，由此导出 $\Gamma a\cap S\neq\varnothing$，因而 $\Gamma a\cap A\neq\varnothing$，这和 $A\in\mathscr{S}$ 相違。

定理2 在对称且无环的图上，內固集族 $\mathscr{S}$ 的每一极大集都是核。

設 S 是 $\mathscr{S}$ 的一极大集；能証任一頂点 $x\notin S$ 满足 $\Gamma x\cap S\neq\varnothing$

即足。事实上，若实际情况不如此，则 $A=S\cup\{x\}$ 将是一内固集（因 $x\notin\Gamma x$），因而有 $A\supset S$；$A\neq S$，这和 S 在 $\mathscr{S}$ 里极大相矛盾。

推理 对称而无环的图恒有核。

事实上，作辅助图 $(\mathscr{S},\overline{\Gamma})$，其頂点是已給对称图的內固集，当且仅当 $S\supset S'$ 时，$S\in\overline{\Gamma}S'$. 輔助图是誘导的，据曹恩引理（第3章），存在頂点 $S\in\mathscr{S}$ 无后继元素，这个 S 是一个极大內固集，按定理2它是一个核。

在已給对称图为有限时，这个推理显成立，其核的求法如次：

任取一点 x_0，作 $S_0=\{x_0\}$. 然后取頂点 $x_1\notin\Gamma S_0$，作 $S_1=\{x_0, x_1\}$. 再取頂点 $x_2\notin\Gamma S_1$，…，若图是有限的，迟早会得 $\Gamma S_n=X$.[1] S_n 是 $\mathscr{S}$ 的极大集，它便是一个核。

定理3 S 是一个核的充分和必要条件，是它的定性函数 $\varphi_s(x)$ 满足

$$\varphi_s(x)=1-\max_{y\in\Gamma x}\varphi_s(y).$$

集合 S 的定性函数 $\varphi_s(x)$ 定义为

$$\varphi_s(x)\begin{cases}=1 & \text{若 } x\in S,\\ =0 & \text{若 } x\notin S.\end{cases}$$

若 $\Gamma x=\varnothing$，则約定

$$\max_{y\in\Gamma x}\varphi_s(y)=0.$$

1° 設 S 是一个核。由內固性，有

$$\varphi_s(x)=1\Rightarrow x\in S\Rightarrow\max_{y\in\Gamma x}\varphi_s(y)=0.$$

由外固性，則有

$$\varphi_s(x)=0\Rightarrow x\notin S\Rightarrow\max_{y\in\Gamma x}\varphi_s(y)=1.$$

故公式成立。

2° 設 $\varphi_s(x)$ 是集合 S 的定性函数；若定理的条件能成立，則

[1] $\Gamma S_n=X$ 应作 $\Gamma S_n=X-S_n$. ——譯者注

$$x\in S \Rightarrow \varphi_s(x)=1 \Rightarrow \max_{y\in\Gamma x}\varphi_s(y)=0 \Rightarrow \Gamma x\cap S=\varnothing,$$
$$x\notin S \Rightarrow \varphi_s(x)=0 \Rightarrow \max_{y\in\Gamma x}\varphi_s(y)=1 \Rightarrow \Gamma x\cap S\neq\varnothing,$$

因此，S 恰是一个核。

定理4 有限扩張图有核。

設在集合

$$X(0)=\{x\,|\,\Gamma x=\varnothing\},$$
$$X(1)=\{x\,|\,\Gamma x\subset X(0)\},$$
$$X(2)=\{x\,|\,\Gamma x\subset X(1)\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

上，用归納法定义出定性函数 $\varphi_s(x)$，滿足前一定理的公式，則本定理便可立即推得。

第3章定理4表明按照这种方式，可在整个 X 上定义 φ_s。

雷卡尔得逊(Richardson)**定理** 若有限图不具奇数长的回路，則这个图有核。

設(X,Γ)是一个沒有奇数长回路的图，在集合 X 上，按下面的方式，逐步定义集合 $Y_0, Y_1, Y_2, \cdots$:

1° 取 $Y_0=\varnothing$，用 B_0 表示子图 $X-Y_0$ 的底（見第2章）；按第2章定理1，这样的底是存在的。取 $Y_1=B_0\cup\Gamma^{-1}B_0$。

2° 若已定义了 Y_n，用 B_n 表示 $X-Y_n$ 所成子图的一个底而滿足 $B_n\subset\Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}B_{n-1}-Y_{n-1})$ 者。

易見这样的底是存在的(1)；取

---

(1) 为了証明在图$(X-Y_n, \Gamma_{X-Y_n})$里存在底

$$B_n\subset\Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}B_{n-1}-Y_{n-1}),$$

考察任一底 B_n'，及按第2章定理3构成 B_n' 所选取的任一无后继元素的頂点 a_0；若能証明在 $X-Y_n$ 里存在頂点 b，适合条件

(1) $b\overset{n}{\geqq}a_0$(在此，$\overset{n}{\geqslant}$ 为由$(X-Y_n)$所成子图的半序关系)，

(2) $b\in\Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}B_{n-1}-Y_{n-1})$，

$$Y_{n+1}=Y_n\cup B_n\cup\Gamma^{-1}B_n.$$

遂有

$$\varnothing=Y_0\subset\subset Y_1\subset\subset Y_2\subset\subset\cdots.$$

但原設图是有限的，故必存在一个整数 m，使 $Y_m=X$，取

$$S=\bigcup_{n=0}^{m-1}B_n.$$

茲往証 S 是图 $(X,\ \Gamma)$ 的一个核。

1° S 乃外固者，盖若 $x\notin S$，则对某一整数 k，将有 $x\in\Gamma^{-1}B_k-Y_k$，因而 $\Gamma x\cap B_k\neq\varnothing$，亦即 $\Gamma x\cap S\neq\varnothing$。

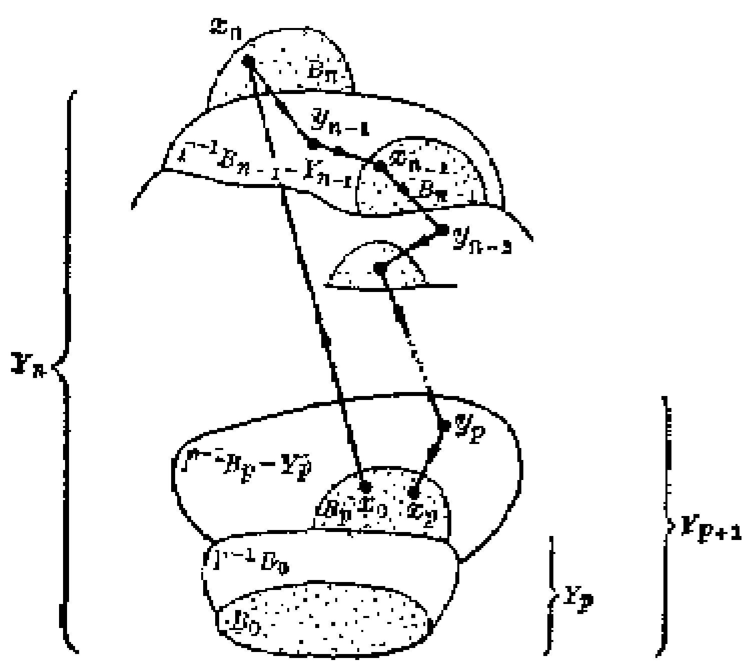


图 5-3

2° S 乃內固者。事实上，B_n 的任二元素不能相邻（因 B_n 是某一子图的一个底）；現在来考查是否可能有两个元素，一个在 B_n 內，一个在 B_p 內，其中 $p<n$，而此二元素相邻。因 $\Gamma^{-1}B_p\subset Y_{p+1}$，而 $B_n\subset X-Y_n\subset X-Y_{p+1}$，故 $B_n\cap\Gamma^{-1}B_p=\varnothing$。同样，有

则以 b 替代 a_0，一切便都满足。

在图 $(X-Y_{n-1},\ \Gamma_{X-Y_{n-1}})$ 里存在路 $u=[a_0,\ a_1,\ \cdots,\ b]$，自 a_0 走进 B_{n-1}；設 a_k 为属于 Y_n 的第一点，則因 $a_k\in X-Y_{n-1}$，$a_k\in Y_n$，$a_k\notin B_{n-1}$，故 $a_k\in\Gamma^{-1}B_{n-1}-Y_{n-1}$；頂点 $b=a_{k-1}$ 恰满足(1)与(2)。

$B_p \cap \Gamma^{-1}B_n = \varnothing$，盖若不然，将能定出一条路 $\mu = [x_0, x_n, y_{n-1}, x_{n-1}, y_{n-2}, x_{n-2}, \cdots, y_p, x_p]$，其中

$$x_0 \in B_p, \quad x_0 \in \Gamma^{-1}B_n,$$
$$x_n \in B_n \subset \Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}B_{n-1} - Y_{n-1}),$$
$$y_{n-1} \in \Gamma^{-1}B_{n-1} - Y_{n-1},$$
$$x_{n-1} \in B_{n-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_p \in \Gamma^{-1}B_p - Y_p,$$
$$x_p \in B_p.$$

然可注意者，路 μ 的所有顶点統在 $X - Y_p$ 内，且 μ 自 $x_0 \in B_p$ 走向 $x_p \in B_p$；但 B_p 是由 $X - Y_p$ 所成子图的一个底，因有 $x_0 = x_p$。路 μ 实际是一个奇数长的回路，这和原設相違。

推广 1　若一个图是全誘导的，且无奇数长的回路，则这个图有核。

事实上，一个全誘导图的每一子图都有底，本定理的証明，便和上面那个定理的証明完全一样：按归納法定义集合 Y_α（在此，α 可能是超限序数）。

推广 2　若一个图处处有限，且不具奇数长的回路，则这个图有核。

自第3章拉多定理，可立卽推得这个結果。

15　在格隆地函数上的应用

由于下面的論断，关于核所建立起来的存在条件，可以推广到格隆地函数上来：

定理 5　若 (X, Γ) 的每一子图都有核，则 (X, Γ) 有格隆地函数。

事实上，設 S_0 是 (X, Γ) 的核，S_1 是由 $X_1 = X - S_0$ 所成子

图的核，S_2 是由 $X_2=X_1-S_1$ 所成子图的核，等等，一般地，取

$$X_\alpha=X_{\alpha-1}-S_{\alpha-1},\ 若\ \alpha\ 不是一个极限序数,$$

$$X_\alpha=\bigcap_{\beta<\alpha}X_\beta,若\ \alpha\ 是一个极限序数.$$

（可注意，$\beta>\alpha$ 导致 $X_\alpha\supset\supset X_\beta$. 使用归納法，可知存在一个序数 γ，使 $X_\gamma=\varnothing$。）

集合 S_α 等构成 X 的一个分划，对于每一顶点 x，将有一个序数 $g(x)$，按下面的規律

$$g(x)=\alpha \Leftrightarrow x\in S_\alpha$$

与之相应，茲往証 $g(x)$ 即是一个格隆地函数。

(1) 設 $g(x)=\alpha$，可証对每一 $\beta<\alpha$，在 Γx 内将存在一个顶点 y，使 $g(y)=\beta$。

因 $x\in S_\alpha$，$\alpha>\beta$，故有 $x\in X_\alpha\subset X_\beta$；$x\notin S_\beta$.

因 S_β 是由 X_β 所成子图的外固集，在 S_β 内存在一个 y，使 $y\in\Gamma x$，此即謂在 Γx 内存在一个 y，使 $g(y)=\beta$。

(2) 設 $g(x)=\alpha$，在 Γx 内不可能存在 y，使 $g(y)=\alpha$，盖在这种情况，S_α 将不内固。

[条件(1)与(2)正好証明 $g(x)$ 是一个格隆地函数。]

推理 1 一个对称图有格隆地函数，当且仅当这个图沒有环。

[一个图如有环，則很明显，它不可能有格隆地函数。]

推理 2 一个不具奇数长回路的图，当它有限，或处处有限，或全誘导，則这个图有格隆地函数。

〔注〕 现在来考察有核图 $G_1, G_2, \cdots, G_n$，这些图的和（或积）是否也有核？若干个图的和，作为确定其核的工具的，是格隆地函数（这就是为什么在本书里給予格隆地函数以相当重視的緣故）。事实上，将第 3 章定理 8 和本章定理 5 結合起来，可見：若 G_i（对所有的 i）的每一子图都有核，則其和

$$G_1+G_2+\cdots+G_n$$

将有格隆地函数 g，因而有核 $S=\{x/g(x)=0\}$.

在下章将見这个重要性的应用。

第6章 图上博奕

16 醫門博奕

設博奕是二人的，命博奕的双方为(A)与(B)。图(X, Γ)可以用来定义一个二人博奕，在这样的博奕里，一个行动是图的一个頂点；起点x_0的选定，是随机的；博奕双方約定輪流行动，(A)先在Γx_0里选取一点x_1，然后(B)在Γx_1里选取一点x_2，(A)再在Γx_2里选取一点x_3，等等。設某一方选到一点x_k，其$\Gamma x_k=\varnothing$，則一局終止，选取最后一点的人便算贏了，而其对方便算輸了。显見，若图不是有限扩張的，則一局未必能終止。

为了不忘这种博奕所自来的著名游戏，我們把如此描述的博奕叫做**醫門博奕**，一如定义图那样，把它記作(X, Γ)；現在的問題，就是要刻划出胜利的行动，也就是說要找出那些点，选擇这些点之后，无論对方回答如何，必能贏得博奕。其主要結果如次：

定理 1 設图有核S，若博奕的一方，在S里选点，則这样的选擇必能保証他获胜或取得和局。

事实上，設博奕者(A)选取$x_1\in S$，或者恰好$\Gamma x_1=\varnothing$，于是他已获胜；或者他的对方不得不在$X-S$里选取一点x_2，这样，博奕便継續进行，(A)重新在S里选取一点x_3，等等。設在某一时刻，某一方因为选取了一点x_k，其$\Gamma x_k=\varnothing$，而获得胜利，則因$x_k\in S$，获胜的一方必定是(A)。定理得証。

若图有格隆地函数，則一个好的博奕者，須先算出一个这样的函数，由此推得图的一个核：

$$S=\{x / g(x)=0\}.$$

若起点x_0满足$g(x_0)=0$，博奕的(A)方便处于不利地位，因为这

时他的对方可以保証获胜或处于和局。相反，当 $g(x_0)\neq 0$，(*A*)方便能选取 x_1，使 $g(x_1)=0$，而保証胜利或处于和局。

推理 若图有限扩張，則存在唯一的一个格隆地函数；这时每一种挑选 y 使 $g(y)=0$ 的，都是胜着，而每一种挑选 z，使 $g(z)\neq 0$ 的，都是敗着。

（显然）

【例1】（伊撒克斯，R. Isaacs） 設 X 是坐标面上点 (p, q) 的集合，其中 p 与 q 是正整数或 0. 博奕的双方約定輪流在 X 里选画一点，若 x 是最后画出的点，接着画点的那一方，只能在自 x 向坐标軸所作垂綫 xa 或 xb 上或此二綫的分角綫 xc 上选画一点。例如在点 $x=(4, 1)$ 之后，只能在点 $(4, 0)$，$(3, 1)$，$(2, 1)$，$(1, 1)$，$(0, 1)$，$(3, 0)$ 內作出选擇。博奕的双方誰先到达点 $(0, 0)$ 便算获胜。

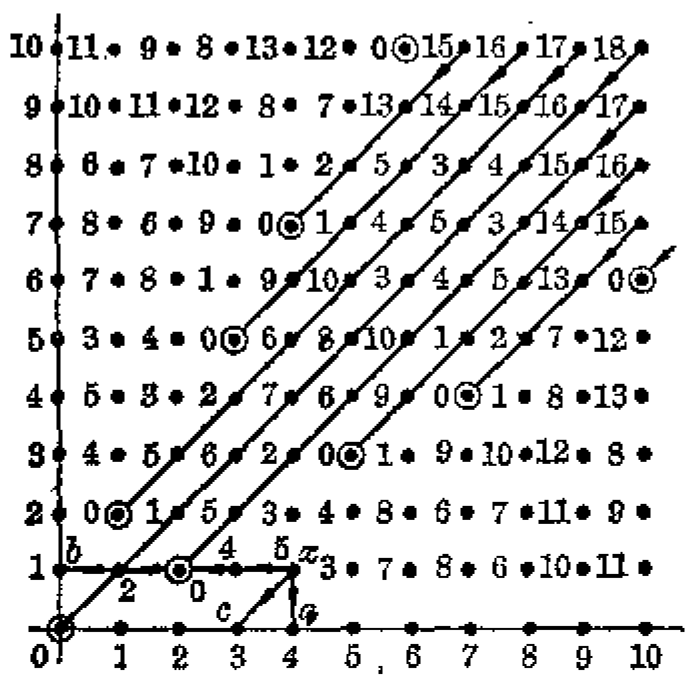


图 6-1

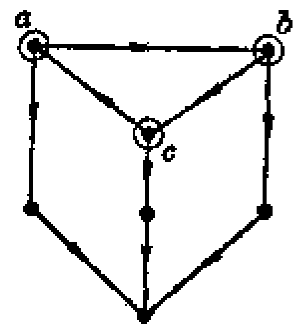


图 6-2

这个图 (X, Γ) 是有限扩張的，因而有格隆地函数 $g(x)$，其在每一点上的值，已在图 6-1 上标出；胜利的选擇，統圍以小圈。虽然导致胜利的点所成的集合，对称于主对角綫，但它們的分布，仍是不規則的。

【例2】 图 6-2 代表一个匯門博奕，这个图既无格隆地函数，也沒有核，

上述方法,便不能应用。然而,博奕的任一方,如果将他的选擇,限制在点 a, b, c 上,則一定可以免除失敗。

現在来研究不同的匿門博奕 (X_1, Γ_1), (X_2, Γ_2), …, (X_n, Γ_n),假定博奕的双方,按照下面的規定,輪流行动:在博奕的过程中,每一方可以选定一个匿門博奕,在选定的博奕上展开活动,而沒有选定的博奕,則置之不問,博奕的双方,誰先不能活动便算失敗。这种情况,实际上也是在一个图上的匿門博奕,而这个图是原給諸图 (X_i, Γ_i) 的和(見第3章)。下面的結論,提供一种方法,以便取得胜利:

定理2 已給具格隆地函数 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 的博奕 (X_1, Γ_1), (X_2, Γ_2), …, (X_n, Γ_n),若在其和上进行博奕,則选擇行动

$$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in X_1\times X_2\times\cdots\times X_n,$$

其

$$g(x)=g_1(x_1)\dot{+}g_2(x_2)\dot{+}\cdots\dot{+}g_n(x_n)=0$$

的,可以保証胜利或处于和局。

这个定理可自第3章定理8立即推得。

【例3】 偶匿門博奕或香擇 博奕双方面向 n 堆火柴,二人輪流选擇一堆(非空),而自其中抽出一根或多根火柴,誰能抽去最后一根,算誰胜利。

这种情况,是博奕 (X_1, Γ_1), (X_2, Γ_2), …, (X_n, Γ_n) 的一个和;在博奕 (X_k, Γ_k) 中, X_k 的一个元素 x_k,表示第 k 堆的情况,而 $g_k(x_k)$ 等于相应的火柴根数。

按定理2,某一选擇,当且仅当其在不同的堆里,所余火柴根数的位数和为零时,这个选擇才是胜利的。

現在来研究定理2的不同的推广;先設 $p\leqslant n$,并設 (X_1, Γ_1), (X_2, Γ_2), …, (X_n, Γ_n) 是已給的 n 个匿門博奕,其 p 級和按定义是一个匿門博奕,博奕的双方,在諸博奕 (X_i, Γ_i) 中挑选 p 个,同时对这 p 个进行活动,而其他未被挑选的置之不管;n 級和对应

于諸图的积，1 級和則对应于这些图的和。为了取胜，有下面的結論：

定理 3 已給 n 个傳递匯門博奕 (X_1, Γ_1)，(X_2, Γ_2)，…，(X_n, Γ_n) ($\Gamma_k = \hat{\Gamma}_k$ 对每一 k 都成立)，設 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 分别是其格隆地函数(这些函数总存在)；这 n 个博奕的 p 級和也具有格隆地函数，其值按下法計算：作二展开

$$g_k(x_k) = (c_k^1, c_k^2, \cdots).$$

取

$$g(x) = \left[\sum_{k=1}^{n} c_k^1\right]_{(p+1)} + (p+1)\left[\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right]_{(p+1)}$$
$$+ (p+1)^2\left[\sum_{k=1}^{n} c_k^3\right]_{(p+1)} + \cdots,$$

于此，$[m]_{(p+1)}$ 表示 m 被 $p+1$ 除的整余数[m 模 $(p+1)$]。

当且仅当 $g(x) = 0$ 时，某一挑选 x 才是胜着。

这个定理的推导，和第 3 章定理 8 完全相似。

【例 4】 p 級匯門博奕(冒尔，E. H. Moore) 博奕的双方，面向 n 堆火柴，且設 p 是一个小于 n 的数。輪到博奕的某一方时，他便在 n 堆里挑选 p 堆，而从选定 p 堆的每一堆里取出一根或多根火柴，誰取出最后一根，算誰胜利。

为了驗証某一选擇 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是否为胜着，須先計算第 k 堆火柴根数的二展开：$g_k(x_k) = (c_k^1, c_k^2, \cdots)$，而后驗証对于所有的整数 r，是否

$$\left[\sum_{k=1}^{n} c_k^r\right]_{(p+1)} = 0.$$

現在来研究一个有限扩張的匯門博奕，其格隆地函数是 $g(x)$；設在 X 上定义一种运算 $\dot{+}$，即謂对于每一对元素

$$(x, y) \in X \times X,$$

作一元素，与之对应，記为 $z = x \dot{+} y$；若 $S \subset X$，$T \subset X$，取

$$S \dot{+} T = \{s \dot{+} t / s \in S, t \in T\}.$$

为了取胜，常可使用下面的結論：

定理4（格隆地，P. M. Grundy）　設图(X, Γ)是有限扩張的，且設已于其上定义了一种运算$\dot{+}$，滿足

$$\Gamma(x\dot{+}y) = (\Gamma x\dot{+}y) \cup (x\dot{+}\Gamma y),$$

則其格隆地函数，在$z=x\dot{+}y$上，滿足公式

$$(1)\qquad g(z) = g(x\dot{+}y) = g(x)\dot{+}g(y).$$

現在用归納法来証明这个公式，其方式是在下列集合里継續取点$z=x\dot{+}y$:

$$X(0) = \{x/\Gamma x = \varnothing\},$$
$$X(1) = \{x/\Gamma x \subset X(0)\},$$
$$X(2) = \{x/\Gamma x \subset X(1)\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

設$z\in X(0)$，則因

$$z\in X(0) \Rightarrow (\Gamma x\dot{+}y)\cup(x\dot{+}\Gamma y) = \Gamma z = \varnothing \Rightarrow x, y\in X(0),$$
$$g(z) = 0 = 0\dot{+}0 = g(x)\dot{+}g(y),$$

公式(1)成立。

設对所有在$X(\alpha-1)$里的z，公式(1)都成立，茲往証，对于在$X(\alpha)$里的頂点$z=x\dot{+}y$，这个公式也成立。若公式不成立，則下二不等式之一必能成立：

$$g(z) > g(x)\dot{+}g(y),$$
$$g(z) < g(x)\dot{+}g(y).$$

1° 若$g(z)>g(x)\dot{+}g(y)$，則将存在一点$z_1\in\Gamma z$，使

$$g(z_1) = g(x)\dot{+}g(y).$$

記$z_1=x_1\dot{+}y$，$x_1\in\Gamma x$（对换x和y是一样的）；因$z_1\in\Gamma z \subset X(\alpha-1)$，有

$$g(z_1) = g(x_1\dot{+}y) = g(x_1)\dot{+}g(y),$$

因而

$$g(x) \dot{+} g(y) = g(x_1) \dot{+} g(y).$$

借助于第3章定理7，可以推得 $g(x)=g(x_1)$，这和 $x_1 \in \Gamma x$ 相違。

2° 若 $g(z) < g(x) \dot{+} g(y)$，可以确定(例如象第3章定理8那样)一个数 γ，使

$$g(z) = \gamma \dot{+} g(y); \quad \gamma < g(x).$$

在 Γx 里存在一点 x_1，使 $\gamma = g(x_1)$，因而

$$g(z) = g(x_1) \dot{+} g(y).$$

但 $x_1 \dot{+} y \in \Gamma z \subset X(a-1)$，遂有

$$g(x_1 \dot{+} y) = g(x_1) \dot{+} g(y) = g(z).$$

然因 $x_1 \dot{+} y \in \Gamma z$，这是矛盾。

【例5】 博奕的双方，在 n 堆火柴里任选一堆，且将所选定的一堆，分成不相等的两堆，誰最后选出一堆，而能加以分划，算誰胜利。

一个行动，表以一組数 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_k$，这些数分别表示各堆火柴的根数。取

$$\begin{aligned} x \dot{+} y &= (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_k) \dot{+} (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_l) \\ &= (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_k, \bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_l), \end{aligned}$$

则运算 $\dot{+}$ 滿足以下条件:

(1) $\Gamma(x \dot{+} y) = (\Gamma x \dot{+} y) \cup (x \dot{+} \Gamma y)$ (基本規律)，

(2) $x \dot{+} y = y \dot{+} x$ (可易)，

(3) $x \dot{+} (y \dot{+} z) = (x \dot{+} y) \dot{+} z$ (結合)，

(4) $x \dot{+} z = y \dot{+} z \Rightarrow x = y$，

(5) 存在一种行动 e(沒有火柴)，使对所有的 x，有 $x \dot{+} e = x$。

一个頂点 z，設不能将其写成 $z = x \dot{+} y$，$x \neq e$，$y \neq e$，称这点是不可約的。于此，不可約頂点是唯一一堆的形象 $z = (\bar{x}_1)$。显有

$$\begin{aligned} g(x) = g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_k) &= g((\bar{x}_1) \dot{+} (\bar{x}_2) \dot{+} \cdots \dot{+} (\bar{x}_k)) \\ &= g(\bar{x}_1) \dot{+} g(\bar{x}_2) \dot{+} \cdots \dot{+} g(\bar{x}_k). \end{aligned}$$

由此，只須知道 g 在不可約行动上的值，經过一个簡单的数位加法，便可立即推得其他的值。于此，显有

$\bar{x}_1 =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$g(\bar{x}_1) =$	0	0	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	3	2	1	3	2	4	3	0

更一般地，可以研究一个有限扩張的博奕，在这个博奕里，只存在一个顶点 e，使 $\Gamma e=\varnothing$，且有运算 $\dot{+}$，滿足(1)，(2)，(3)，(4)，(5)；阿达姆斯(E. W. Adams)与本逊(D. C. Benson)[1]已証明，**每一行动 x，可以分解成有限个不可約行动之和，且这种分解是唯一的。**

17 博奕的一般定义(具全部信息)

博奕的一般定义，虽因博奕的局的有限制而甚易，但当去掉这种制約时，则需要极大的审愼。博奕者，乃参加博奕的人，有**主动**与**被动**之分。关于簡称为(A)与(B)的两个博奕者，可定义一种博奕如次：

1° 一个集合 X，其元素称为**博奕的行动**；

2° 一个自 X 到 X 的多値映象 Γ，称为**博奕的規律**；

3° 一个自 X 到$\{0, 1, 2\}$的单値映象 θ，称为**輪序**；

当且仅当 $\Gamma x=\varnothing$ 时，$\theta(x)=0$；若 $\theta(x)=1$，在行动 x 之后輪到(A)动作，而当 $\theta(x)=2$，則輪到(B)。

4° 二实函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，定义于 X 上，且在其上有界，称为博奕双方(A)和(B)的**利益函数**。

博奕的一局，按下面的方式实行：初始行动 x_0，在 X 里是随机的，若 $\theta(x_0)=1$，博奕者(A)便有权在 Γx_0 里挑选一个行动 x_1，在这之后，輪到的博奕者[即謂若 $\theta(x_1)=1$，輪到的是(A)，$\theta(x_1)=2$，輪到的是(B)]，在 Γx_1 里挑选一个行动 x_2，以下类推。假使某个博奕者挑选了一个行动 x_k，使 $\Gamma x_k=\varnothing$，这一局便行終止(无疑，一局可能不会終止)。設 $S\subset X$ 是在一局的进行当中，所碰到的那些

行动的集合,则(A)的收获,定义为

$$f(S)=\sup_{y\in S}f(y),\ 若(A)是主动的,$$

$$f(S)=\inf_{y\in S}f(y),\ 若(A)是被动的。$$

用函数 $g(x)$ 同样可以定义博奕者(B)的收获。

博奕者(A)的目的,乃是使他的收获越高越好,一般将 $|f(S)|$ 看作一笔錢数,当 $f(S)\geqslant 0$ 时,(A)收入这笔錢,若 $f(S)\leqslant 0$,则(A)须付出这笔錢。

取 $X_A=\{x/\theta(x)=1\}$,$X_B=\{x/\theta(x)=2\}$;于此可注意者,所謂一个博奕,实际就是一个图 (X,Γ),其每一頂点 x,用向量 $(\theta(x),f(x),g(x))$,賦予数值。

(X,Γ)的一个子图,确定一个**子博奕**,一个部分图则确定一个**部分博奕**,按照上面的定义,每一子博奕和每一部分博奕,其本身仍是博奕(在最常見的其他定义下,这种情况未必眞实);一个博奕,恰好就是在一个抽象集合 X 上給出的一种"結构"。

【例1】 匭門博奕 現在来研究在图 $(\bar{X},\Gamma)$ 上的匭門博奕;博奕的一个**行动**,就是一个偶对 $(\bar{x},i)$,其中 $\bar{x}\in\bar{X}$,而 i 等于1或2,視最后一次行动的那个博奕者是(B)还是(A)而定;于此,有

$$\theta(\bar{x},i)=i,\ 若\ \bar{\Gamma}\bar{x}\neq\varnothing,$$
$$\theta(\bar{x},i)=0,\ 若\ \bar{\Gamma}\bar{x}=\varnothing,$$
$$\Gamma(\bar{x},1)=\bar{\Gamma}\bar{x}\times\{2\},$$
$$\Gamma(\bar{x},2)=\bar{\Gamma}\bar{x}\times\{1\}.$$

若 $\bar{\Gamma}\bar{x}=\varnothing$,有

$$f(\bar{x},2)=g(\bar{x},1)=1.$$

在其他一切情况,$f(x)=g(x)=0$;博奕的双方都是主动的。

【例2】 下棋 博奕的双方(A)和(B),一走白棋,一走黑棋;行动 $x=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,\cdots,i)$ 用棋盘上所下棋子的不同位置 $\bar{x}_1$,$\bar{x}_2$,…及指标 i 来表示,这个指标 i 等于1或2,指明在行动 x 之后,下一着該誰走。$\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,\cdots)$ 也叫做行动 x 的表解。

博奕者(A)是主动的，且当x是一着杀死黑棋的行动，$f(x)=1$；在其他一切情况，$f(x)=0$。

【例3】 **追赶博奕**[2] 在一个曲面$\bar{S}$（"海"）上，两只船相互追逐；这种情况，就好象是一种博奕，博奕的双方(A)和(B)，在整个时間內，輪流移动各自負責的船。設$\bar{x}_1$是追赶的那只船在$\bar{S}$上的位置，$\bar{x}_2$是被追赶的那只船在$\bar{S}$上的位置，而i表示理論上的輪流次序，这个博奕的一个行动便是$x=(\bar{x}_1, \bar{x}_2, i)$。設$B_i(\bar{x}_i)\subset\bar{S}$是以点$\bar{x}_i$为中心，以船$\bar{x}_i$一秒钟所能走的最大距离为半徑的一个圈；于是有

$$\Gamma(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 1)=\bar{B}_1(\bar{x}_1)\times\{\bar{x}_2\}\times\{2\},$$
$$\Gamma(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 2)=\{\bar{x}_1\}\times\bar{B}_2(\bar{x}_2)\times\{1\}.$$

取$d(\bar{x}, \bar{y})$表示$\bar{x}$，$\bar{y}$二点間的距离；若追赶的那只船，目的在于逐渐接近被追赶的船，則博奕者(A)是主动的，且

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, i)=-d(\bar{x}_1, \bar{x}_2).$$

若追赶的那只船，目的在于捉住被追赶的船，(A)仍是主动的，且

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, i)=1, \quad 当\ \bar{x}_1=\bar{x}_2,$$
$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, i)=0, \quad 当\ \bar{x}_1\neq\bar{x}_2.$$

若被追赶的那只船，目的在于不被捉住，博奕者(B)是被动的，且

$$g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, i)=1, \quad 当\ \bar{x}_1\neq\bar{x}_2,$$
$$=0, \quad 当\ \bar{x}_1=\bar{x}_2.$$

于此，就(A)的目的論，(A)天然是主动的，就(B)的目的論，(B)天然是被动的。若在$\bar{S}$上指定一个区域，作为某一只船的活动范圍，便得一个子博奕；若降低某一只船的最大速度，便得一部分博奕。

18 策　略

在博奕$(X, \Gamma, \theta, f, g)$里，所謂博奕者$(A)$的**策略**，是自$X_A$到$X$的一个单値映象$\sigma$，满足

$$\sigma x\in\Gamma x \quad (x\in X_A).$$

当博奕者(A)一开始便决定："在博奕进行过程中，只要輪到我行动，在每一行动x之后，我总挑选行动σx"，这就叫做(A)采用策略σ。博奕者(A)策略σ的集合記为Σ_A。

若初始行动x_0已定，且博奕双方(A)和(B)已分别决定采用策略σ和τ，则博奕的这一局便已完全确定，用$\langle x_0;\ \sigma,\ \tau\rangle$記所能碰到的行动的集合，$(A)$的收获便是

$$f(x_0;\ \sigma,\ \tau)=\sup\{f(x)/x\in\langle x_0;\ \sigma,\ \tau\rangle\},$$

当(A)是主动的。

$$f(x_0;\ \sigma,\ \tau)=\inf\{f(x)/x\in\langle x_0;\ \sigma,\ \tau\rangle\},$$

当(A)是被动的。

若策略对$(\sigma_0,\ \tau_0)$满足

$$f(x;\ \sigma,\ \tau_0)\leqslant f(x;\ \sigma_0,\ \tau_0)\quad(\sigma\in\Sigma_A),$$

$$g(x;\ \sigma_0,\ \tau)\leqslant g(x;\ \sigma_0,\ \tau_0)\quad(\tau\in\Sigma_B),$$

则$(\sigma_0,\ \tau_0)$定义为一个(关于行动x的)**均衡策略对**。

換句話讲，在开始博奕的一局之前，博奕双方考虑采用策略σ_0与τ_0，则这个决定具有相当的稳定性：在博奕进行当中，博奕的某一方，如欲改变其策略，则其收获必将减少，作为对他的"惩罰"。

設策略对$(\sigma_0,\ \tau_0)$对一切行动x都是均衡的，则这对策略，称为博奕的**絕对均衡对**。将关于有限扩張图核的存在定理加以推广，可得下面的基本結論：

翠尔麦罗-馮·諾曼(Zermelo-Von Neumann)定理[1] 設博奕的图$(X,\ \Gamma)$有限扩張，且設集合$f(X)=\{f(x)/x\in X\}$，$g(X)$都是有限的，则这个博奕有絕对均衡对$(\sigma_0,\ \tau_0)$。

象上章一样，一步一步地定义集合$X(\alpha)$：

$$X(0)=\{x/\Gamma x=\varnothing\},$$

[1] 这个定理是翠尔麦罗(E. Zermelo)首先在下棋中发现的，差不多同时卡尔馬(J. Kalmar)也发现了这个定理，馮·諾曼将这个定理推广到支付博奕里(在这种博奕里，博奕一方的所得，是其对方的所失)。其后柯恩(W. H. Kuhn)将这个定理推广到一种博奕里，其中博奕各方的利益并不完全相反；在[2]，我們将这个定理推广到沒有时間限制的博奕里去，并推广到从一个位置走到另一位置有很多条路这种情况。这里所叙述的，是这个定理的最一般形式。

$X(\alpha)=\{x/\Gamma x\subset X(\alpha-1)\}$，当 α 不是极限序数，

$X(\alpha)=\bigcup_{\beta<\alpha}X(\beta)$，当 α 是极限序数。

因图是有限扩張的，据第3章定理4，存在一个序数 γ，使 $X=X(\gamma)$. 现在就来一步一步地在一切集合 $X(\alpha)$ 上，定义一个均衡对 (σ_0, τ_0).

在 $X(0)$ 上，任取

$$\sigma_0 x=x \quad (x\in X(0)).$$

若 α 不是一个极限序数，且若 (σ_0, τ_0) 在 $X(\alpha-1)$ 上已被定义，現按下述方式，在 $X(\alpha)$ 上定义均衡对 $(\bar\sigma_0, \bar\tau_0)$：若 $x\in X_A$，

1° 当 $x\in X(\alpha-1)$，取 $\bar\sigma_0 x=\sigma_0 x$，

2° 当 $x\in X(\alpha)-X(\alpha-1)$，取 $\bar\sigma_0 x=y$，其中 $y\in\Gamma x$，且

$$f(y;\ \sigma_0,\ \tau_0)=\max_{z\in\Gamma x}f(z;\ \sigma_0,\ \tau_0).$$

显見 (σ_0, τ_0) 是 $X(0)$ 所成子博奕的均衡对；設 (σ_0, τ_0) 是 $X(\alpha-1)$ 所成子博奕的均衡对，兹往証 $(\bar\sigma_0, \bar\tau_0)$ 必是 $X(\alpha)$ 所成子博奕的均衡对，即往証

(1) $f(x;\ \bar\sigma,\ \bar\tau_0)\leqslant f(x;\ \bar\sigma_0,\ \bar\tau_0) \quad (\bar\sigma\in\Sigma_A,\ x\in X(\alpha))$，

(1') $g(x;\ \bar\sigma_0,\ \bar\tau)\leqslant g(x;\ \bar\sigma_0,\ \bar\tau_0) \quad (\bar\tau\in\Sigma_B,\ x\in X(\alpha))$.

(1)与(1')对于 $x\in X(\alpha-1)$ 已能成立，設 $x\in X(\alpha)-X(\alpha-1)$.

若 $x\in X_A$，取 $\bar\sigma x=z$，因 $z\in X(\alpha-1)$，故

$$f(z;\ \sigma,\ \tau_0)\leqslant f(z;\ \sigma_0,\ \tau_0)\leqslant f(y;\ \sigma_0,\ \tau_0).$$

现在按各种可能情况来推出(1)。

1° 若(A)是主动的，且 $f(x)\leqslant f(z;\ \sigma,\ \tau_0)$，有

$f(x;\ \bar\sigma,\ \bar\tau_0)=f(z;\ \sigma,\ \tau_0)\leqslant f(y;\ \sigma_0,\ \tau_0)\leqslant f(x;\ \bar\sigma_0,\ \bar\tau_0)$.

2° 若(A)是主动的，且 $f(x)\geqslant f(z;\ \sigma,\ \tau_0)$，有

$$f(x;\ \bar\sigma,\ \bar\tau_0)=f(x)\leqslant f(x;\ \bar\sigma_0,\ \bar\tau_0).$$

3° 若(A)是被动的，而 $f(x)\leqslant f(y;\ \sigma_0,\ \tau_0)$，有

$$f(x;\bar{\sigma},\bar{\tau}_0)\leqslant f(x)=f(x;\bar{\sigma}_0,\bar{\tau}_0).$$

4° 若(A)是被动的，而$f(x)\geqslant f(y;\sigma_0,\tau_0)$，有

$$f(x;\bar{\sigma},\bar{\tau}_0)\leqslant f(z;\sigma,\tau_0)\leqslant f(y;\sigma_0,\tau_0)=f(x;\bar{\sigma}_0,\bar{\tau}_0).$$

用g代f，同样可以推得(1')。

推理 1 若博奕的图(X,Γ)是有限扩張的，对一切$\varepsilon>0$，恒存在均衡对(σ_0,τ_0)，使

$$f(x;\sigma,\tau_0)\leqslant f(x;\sigma_0,\tau_0)+\varepsilon\quad(x\in X,\ \sigma\in\Sigma_A),$$

$$g(x;\sigma_0,\tau)\leqslant g(x;\sigma_0,\tau_0)+\varepsilon\quad(x\in X,\ \tau\in\Sigma_B).$$

事实上，将利益函数f与g，代以函数f'与g'，使集合

$$f'(X)=\{f'(x)/x\in X\},$$

$$g'(X)=\{g'(x)/x\in X\}$$

都是有限的，且使

$$|f'(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon\quad(x\in X),$$

$$|g'(x)-g(x)|\leqslant\varepsilon\quad(x\in X).$$

因原設f与g在X上有界，这总是可能的。对于f'与g'存在均衡对，对于f与g因而也就存在ε-均衡对。

推理 2 若博奕的图(X,Γ)是有限扩張的，对一切$\varepsilon>0$，恒存在策略σ_0与τ_0，使(对无論什么样的$\sigma\in\Sigma_A$，$\tau\in\Sigma_B$)

$$f(x_0;\sigma,\tau_0)-\varepsilon\leqslant f(x_0;\sigma_0,\tau_0)\leqslant f(x_0;\sigma_0,\tau)+\varepsilon.$$

換言之，在以x_0为初始行动的一局中，博奕者(A)借助于策略σ_0，可以保証其所得为$f(x_0;\sigma_0,\tau_0)$(ε除外)，根据第一个不等式，其他任一策略σ，都不能保証他得更多的利益(ε除外)。策略σ_0遂是(A)的一个**优良策略**。

为了証明这个推理，只须作$f(x)=-g(x)$，且将(A)視为主动者，(B)視为被动者；因有

$$f(x_0;\sigma,\tau)=-g(x_0;\sigma,\tau),$$

所提出的結論便可立即推得。

設博奕双方的所得，总是絕对值相等而号相反，则謂这种博奕是对偶的.数量

$$f(\sigma, \tau) = -g(\sigma, \tau)$$

称为博奕的值。(A)要求得一个值尽可能地大，而(B)則要求得一个值尽可能地小。借助于一种策略，(A)可能保証的最大值是

$$\alpha_0 = \sup_\sigma \inf_\tau f(\sigma, \tau).$$

(B)借助于一种策略，可能保証的最小值是

$$\beta_0 = \inf_\tau \sup_\sigma f(\sigma, \tau).$$

可注意者，恒有 $\alpha_0 \leqslant \beta_0$.盖若(A)与(B)各采用一种优良策略，博奕的值将至少等于 α_0，而至多等于 β_0。可是我們还有更进一层的結論：

定理 5　若在对偶博奕里，图 (X, Γ) 有限扩張，則 $\alpha_0 = \beta_0$[1].

事实上，按推理 2，有

$$\sup_\sigma f(\sigma, \tau_0) \leqslant f(\sigma_0, \tau_0) + \varepsilon,$$

$$\inf_\tau f(\sigma_0, \tau) \geqslant f(\sigma_0, \tau_0) - \varepsilon.$$

因有

$$\beta_0 \leqslant f(\sigma_0, \tau_0) + \varepsilon \leqslant \alpha_0 + 2\varepsilon.$$

因 ε 是任意的，故 $\beta_0 \leqslant \alpha_0$，但已有相反的不等式，故恰有 $\beta_0 = \alpha_0$.

【例 1】从这个定理所能推得的結論异常丰富。关于一个有限扩張的匿門博奕，其值不外是 $+1$ 或 -1，因此，乃重新获得一个已知的結論：已給初始行动 x_0，或者对于(A)存在一种策略，使他确有所得($\alpha_0 = +1$)，或者对于(B)存在一种策略，使他确有所得($\alpha_0 = -1$).

---

[1] 我們已更証出，若图不有限扩張，这个定理也一样成立(見[2]第1章，p.p. 15～18)。

【例 2】 研究下面的博奕：(A)和(B)二人，在图 6–3 的图上，輪流各走一段弧，一局終了，計算結果，若图上加圈那些頂点中一点(a或b)，恰經过偶数次，(A)付(B)一个法郎，否則(B)付(A)一个法郎。

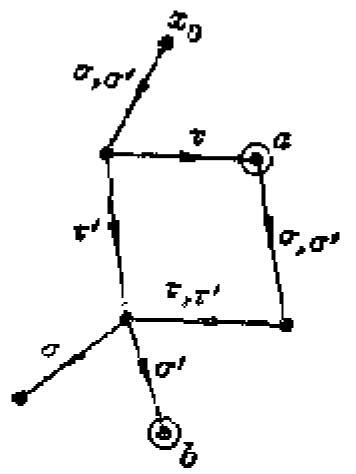


图 6–3

这个博奕，甚易用一种錯誤的方式体現出来，而认为博奕的双方，各有两种策略(如图 6–3 所示)，若(A)采用策略σ，値是$f(\sigma,\tau)=-1$，若(A)采用策略σ'，値是$f(\sigma',\tau')=-1$，这样一来，(A)可能保証的較好收获，似乎就是$\alpha_0=-1$。按同样理由，有$\beta_0=+1$。

于是似有$\alpha_0<\beta_0$，而与定理 5 矛盾。

实际上，这里牽涉到一种在文献上常見的明显的錯誤。

在本例，其錯誤之产生，文由于博奕的一个行动，不是图的一个頂点，而是所遇到的頂点的一个序列u，且尤其重要的，博奕者的收获是$\max\{f(x)/x\in\langle\sigma,\tau\rangle\}$这种形式。这个問題要是这样正确地加以处理，便甚易驗証$\alpha_0=\beta_0=+1$。

第 7 章　最短路徑問題

19　驛 站 方 法

已給图 (X, Γ) 及其二頂 a 与 b，現在提出下面的問題:

問題 1　在图里找出一条路，自 a 走向 b.

問題 2　找出一条最短的路，自 a 走向 b.

問題 2 包含問題 1。

【例 1】 一切有关一个人的游戏，最后都归結到一个所謂"驛站方法"：已給位置 a，一站一站地摸索前进，以到达位置 b. **迷陣**是一个著名的例：一个人，位于 a，要顺着巷道，走出迷陣(图 7-1a)；这个問題归結为求解关于图 7-1b 里那个图的問題 1，在这个图里，X 是岔道口的集合，自岔道口 x，能有巷道通到岔道口 y，即命 $y=\Gamma x$.

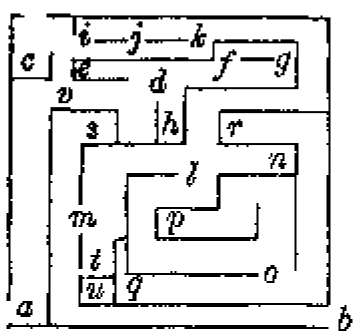


图　7-1a

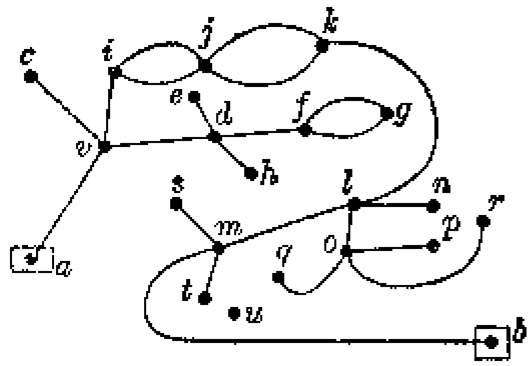


图　7-1b

【例 2】 **一只狼，一头羊和一颗白菜問題**　一头羊一颗白菜和一只狼同时位于河的一岸，一个摆渡人，想把它們渡到对岸，可是他的渡船非常小，一次只能装載一样东西，根据很明显的理由，狼和羊，羊和白菜，不能在无人监視的情况下相处，問摆渡人应如何处理?

这个著名問題，由于所要考虑的不同情况較少，而易于解决；但它是应用問題 1 的一个标准例子：作出图 7-2 里那个图，找出自位置 a (于此，羊 C，白菜 X，狼 L 和摆渡人 P 同在河的右岸) 通向位置 b (于此，河的右岸，已空无所有) 的一条路，这样的路，已在图 7-2 上用箭头表出。

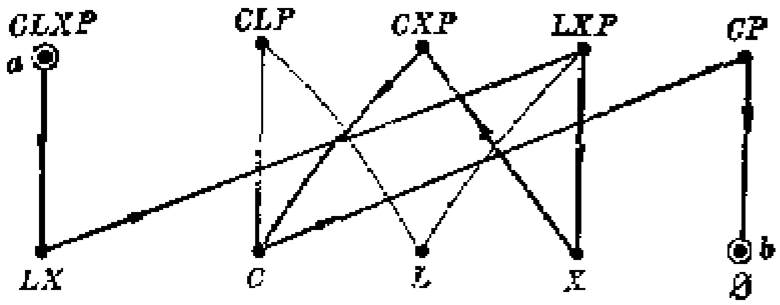


图 7-2

在比較复杂的情况，系統的法則，异常需要，目前已有很多解法。

在平面图上解决問題 I 的法則　在迷陣那种情况，如图 7-1 所示，它不包含几个不相連接的部分，且可以在一个水平面上全部作出，这样的图，有一突出性质：它的边互不相交(除頂点外)；換句話說，这个图是平面的。

对于这种图，极易解决問題 I，此时只須遵循下面的規律即足：

每当到达一个岔道口时，总顺着最右面的巷道前进。

根据这样規律，显見离开迷陣时，在图的任一边上，来往行走，决不多于二次。

解問題 I 的一般法則　首先研究一个自 a 生长的树形图 (見图 2-1)，而寻求一条自 a 走向点 b 的路；一个簡单的方法就是，自 a 出发，順着任一枝路，尽量前进，然后沿着所走的道路，向回走到最近的一个岔道口，以便順着一条未曾走过的新方向繼續前进，等等。按照这样的方式，可以保証，当走到点 b 时，在任一边上，来往行走，决不多于二次。

若图不是树形图，于某一边 u 的一个端点 x，将 u 切开，則問題便可回到上述那种情况：每当遵循一条未曾走过的边，到达一个曾經走过的岔道口，便做一次这样的切割(如此恰得一个树形图)。

須注意者，这个法則，可以应用于迷陣問題，不只对于識路的人可以用，对于迷了路的游行者，也可以应用：他只要把遇到过的岔道口及走过的巷道打上鮮明的記号就可以了。

解問題1的另一法則（特鋭，G. Tarry [5]） 对于一个闖在迷陣里的游行者，只須注意下面的規則卽足：

决不在同一边上按同一方向走两次；在某一岔道口 x 上，若不是已无路可走，决不沿第一次走到岔道口 x 那样的边行走。

1° 首先来証明，当游行者因为已不能再应用上面的規則，而在某一点被阻住了，那么这点一定是 a，且过点 a 的每一边，必已来回各走了一次。事实上，設游行者阻于点 $x(x\neq a)$，且設这个岔道口先已經过了 k 次，那么这人必已沿过 x 的那些边向着 x 走了 $(k+1)$ 次，背着 x 走了 k 次，因而必定还有某一边，先前他沒有在这条边上背着 x 走过，現在他便可以沿这条边自 x 走开。

2° 設 $(a_0=a, a_1, a_2, \cdots)$ 是所走过的不同岔道口的叙列，下标是按照第一次走过那样順序編排的；現在来証明連接 a_k 的每一边必已被走了两次。事实上，这个論断对 $k=0$ 是眞实的（根据1°），設論断对一切 $k\leqslant p-1$ 都眞，往証論断对 $k=p$ 亦眞。設 (a_i, a_p) 是第一次引导游行者走向 a_p 的那条边，因 $i<p$，这条边必已按其两个方向各走了一次，按特鋭規則，假使不是其他所有过 a_p 的边各已来回走了一次，这便不可能。故得欲証。

3° 設自 a 走向 b，存在一条路 $(a, x_1, x_2, \cdots, x_m, b)$，則岔道口 b 迟早必被走到，至为明显；蓋据2°，和一个能走到的頂点相邻的每一頂点，其本身必也可以被走到。

解問題2的法則 用迭代方法，可以一步一步地給每个頂点 x 以一个号碼，这个号碼等于自 a 走到 x 那条最短路徑的长：

1° 在頂点 a 記上号碼0。

2° 設所有記上号碼 m 的頂点，构成一个集合 $A(m)$，則下述

集合的所有頂点,便都記上号碼 $m+1$:

$$A(m+1)=\{x/x\in \Gamma A(m),\ x\notin A(k),\ k\leqslant m\}.$$

3° 当頂点 b 已記上号碼,記号碼的工作便停止。設 $b\in A(m)$,取出頂点 $b_1, b_2, \cdots$,使

$$\begin{aligned} &b_1\in A(m-1), &&b_1\in \Gamma^{-1}b,\\ &b_2\in A(m-2), &&b_2\in \Gamma^{-1}b_1,\\ &\cdots\cdots &&\cdots\cdots\\ &b_m\in A(0), &&b_m\in \Gamma^{-1}b_{m-1}, \end{aligned}$$

則 $\mu=[a=b_m, b_{m-1}, \cdots, b_1, b]$ 便是欲求的路。

20 进一步的推广

我們常会遇到下面許多問題,这些問題都包含問題 1 和 2:

問題 3 已給图 (X, U),对每一弧 u,賦予一个数 $l(u)\geqslant 0$,称为 u 的"长度",現在要寻求一条路 μ,自頂点 a 走到頂点 b,使全长

$$\sum_{u\in\mu} l(u)$$

达到极小。

問題 4 对所有的路 $\mu=[x_1, x_2, \cdots, x_m]$,作一个数值函数 $f(\mu)$ 与之相应,寻求一条路 μ,使 $f(\mu)$ 达到极小。

問題 5 已給图 G,对所有的部分子图 G_1,作一数值函数 $h(G_1)$ 与之相应;寻求一个部分图 G_1,使 $h(G_1)$ 达到极小。

这里的每一問題,都包含其前一問題。

【例 1】 設 X 是一个地理位置集合,U 是連接这些位置中某些点的路的集合。假定在 X 里已包含所有这些路的交点。对于每一条路 u,$l(u)$ 或者表示 u 的长度的公里数,或者表示走过 u 所需要的旅費,或者表示走过 u 所費的时間(已顧序表出旅行的各种情况)。

自一个城市,走到另一城市,或求最短路徑,或求最經济的路徑,或求費

时最少的路徑，每一情况，都要求解决問題3。

【例2】 **动态規划**（貝尔曼，R. Bellman）　两个金矿 a 和 b，各含 α 吨和 β 吨金子，一部机器，不能两地同时开采，但已知在一年之內，a 矿可开出其含金的 $r\%$（次年继續开采的概率是 p），b 矿可开出其含金的 $s\%$（次年继續开采的概率是 q）。现在研究具两个顶点 a 和 b 的图，其 $\Gamma a=\Gamma b=\{a, b\}$，在这个图上要寻求一条路 $[x_1, x_2, \cdots]$（于此，当第 i 年恰开采 a 矿，$x_i=a$），使全部开采所得的数学期望达到极大。使用最优策略，所期望得到的全部金子 $F(\alpha, \beta)$，由下面的泛函方程来定义：

$$F(\alpha, \beta)=\max\{r\alpha+pF[(1-r)\alpha, \beta], s\beta+qF[\alpha, (1-s)\beta]\}.$$

这种所謂"动态規划"的問題，是問題4的一种特例，其中 Γx 是一个固定的集合，而 $f(\mu)$ 則是一个异常特殊的函数。

我們现在只研究类型3这样的問題：考虑图 $G=(X, U)$，对每一弧 u，給定"长度" $l(u)\geqslant 0$，而于 x_0 与 x_n 之間，求出一条路 μ，使总长

$$l(\mu)=\sum_{u\in\mu} l(u)$$

达到极小。

解問題3的法則（福特，L. Ford）　一个簡单方法，便于用来解决顶点极多的网絡問題的，叙述如下：

1° 記每一顶点 x_i 以一个指标 λ_i；首先取 $\lambda_0=0$，及 $\lambda_i=\infty$，当 $i\neq 0$。

2° 寻找 $\lambda_j-\lambda_i>l(x_i, x_j)$ 的弧 (x_i, x_j)；代 λ_j 以 $\lambda_j'=\lambda_i+l(x_i, x_j)<\lambda_j$；当 $j\neq 0$，可知 $\lambda_j'>0$。继續这样做，一直到不能减小任一 λ_j 为止。

3° 必存在一点 x_{p_1}，使 $\lambda_n-\lambda_{p_1}=l(x_{p_1}, x_n)$；盖在上法的进行过程中，$\lambda_n$ 单調下降，x_{p_1} 即是用来使 λ_n 减小的最后一点。同样，存在一点 x_{p_2}，使

$$\lambda_{p_1}-\lambda_{p_2}=l(x_{p_2}, x_{p_1}), \cdots\cdots。$$

叙列 $\lambda_n, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \cdots$ 是严格下降的，在某一时刻，将有 $x_{p_{k+1}}=x_0$，

于是 λ_n 便是 x_0 与 x_n 之間最短路徑的长，而

$$\mu_0=[x_0, x_{p_k}, x_{p_{k-1}}, \cdots, x_{p_1}, x_n]$$

恰是 x_0 与 x_n 之間一条最短路徑。

〔証〕 設 $\mu=[x_0, x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_{s+1}}=x_n]$ 是 x_0 与 x_n 之間任意的一条路，用 $l(\mu)$ 表示其长(广义的)；乃有

$$\lambda_{k_1}-0\leq l(x_0, x_{k_1}),$$

$$\lambda_{k_2}-\lambda_{k_1}\leq l(x_{k_1}, x_{k_2}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_n-\lambda_{k_s}\leq l(x_{k_s}, x_n).$$

两端各自相加，对所有的路 μ，均有

$$\lambda_n-0\leq l(\mu).$$

但对路 μ_0，有 $\lambda_n=l(\mu_0)$，故路 μ_0 确是最短的。

【例 3】 作为例，讀者可以驗証，在图 7-3 的那个对称图上，x_0 与 x_n 之間的最短路徑，其长为 $l(\mu_0)=14$。

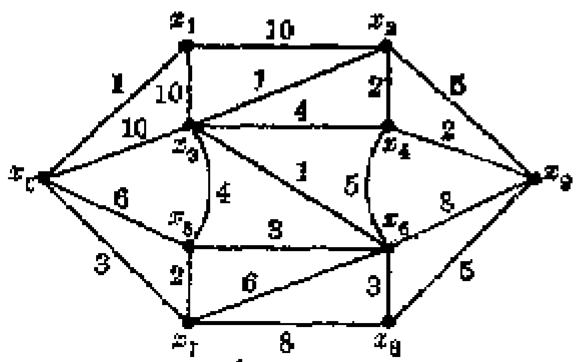


图 7-3

〔注〕 为了簡单起見，当 $(x_i, x_j)\in U$，取 $l_j^i=l(x_i, x_j)$，当 $(x_i, x_j)\notin U$，取 $l_j^i=+\infty$；对于每一条路 μ，可作数 ξ_j^i 与之相应，当 μ 用到弧 (x_i, x_j)，$\xi_j^i=1$，否則 $\xi_j^i=0$。問題 3 乃归結为求一組整数 $(\xi_j^i/i=0, 1, \cdots, n;\ j=0, 1, \cdots, n)$，极小化綫性式 $\sum_{i,j} l_j^i\xi_j^i$，并滿足以下綫性不等方程組：

$$\begin{cases} 0\leq\xi_j^i\leq 1, \\ \sum_j(\xi_j^i-\xi_i^j)=0,\ \text{当 } i\neq 0,\ i\neq n, \\ \sum_j(\xi_j^0-\xi_0^j)=+1, \\ \sum_j(\xi_j^n-\xi_n^j)=-1. \end{cases}$$

換言之，我們形成了一个綫性規划，可以使用电子計算机来解决；然而这岂不是揮动鉄錘去击碎蒼蠅嗎？

第 8 章 运輸网絡

21 极大流問題

一个沒有环的有限图，在其每段弧 u 上，給定一个数 $c(u)\geqslant 0$（称为弧 u 的容量），并具下二性质，称为**运輸网絡**：

1° 存在一点且仅存在一点 x_0，其 $\Gamma^{-1}x_0=\varnothing$；点 x_0 称为网絡的发点；

2° 存在一点且仅存在一点 z，其 $\Gamma z=\varnothing$；点 z 称为网絡的收点。

設 U_x^- 为内向过 x 那些弧的集合，U_x^+ 为外向过 x 那些弧的集合。函数 $\varphi(u)$，定义于 U 上，具整数值，并能满足以下三关系式，称为网絡的一个流：

(1) $\varphi(u)\geqslant 0 \quad (u\in U)$，

(2) $\sum\limits_{u\in U_x^-}\varphi(u)-\sum\limits_{u\in U_x^+}\varphi(u)=0 \quad (x\neq x_0,\ x\neq z)$，

(3) $\varphi(u)\leqslant c(u) \quad (u\in U)$.

$\varphi(u)$ 实际上是流过自 x 到 y 那段弧 $u=(x, y)$ 的物資数量，不超过这段弧的容量；但另一方面，若 x 不是发点 x_0 或收点 z，則流入 x 的物資数量等于自 x 流出的数量。

自 (2) 可立即推得：

(4) $\sum\limits_{u\in U_z^-}\varphi(u)=\sum\limits_{u\in U_{x_0}^+}\varphi(u)=\varphi_z$.

数値 φ_z 代表到达点 z 的物資数量，称为 z 的收量，或流 φ 的値。現在要求解决的問題，是确定一个已知运輸网絡的极大流量。

【例1】 两个大陆間的海上运輸 某些港口 $x_1, x_2, \cdots$ 生产一种产品，而为另一些港口 $y_1, y_2, \cdots$ 所需要；x_i 的生产量設为 s_i，y_j 的需要量設为 d_j。設有一条或多条船自 x_i 駛向 y_j，用 c_{ij} 表示所能运送产品数量的总和。这样的

設置，能否满足一切需要？如何組織运輸？为了将这个問題，归結为极大流問題，只須将 x_i 到 y_j 联以容量为 c_{ij} 的弧，然后自某一发点 x_0 用一条容量是 s_i 的弧，分別联到点 x_i，再自各个 y_j 用容量为 d_j 的弧，联到收点 z；若 φ 是极大流，則 $\varphi(x_i, y_j)$ 便是在尽量满足需要的情况下，自 x_i 送到 y_j 的产品数量。

【例2】 动力网 [3] 从不同的城市 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n$ 发出車輛，送到唯一的一个地点 $\bar{y}$，設 $(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$ 是联系城市 $\bar{x}_i$ 与 $\bar{x}_j$ 的一条路，用 t_{ij} 表示自 $\bar{x}_i$ 駛到 $\bar{x}_j$ 所需要的时間；再設在一个单位时間内能够在这条路上通过的車輛数是 c_{ij}（若根本沒有这样的路，$c_{ij}=0$），能在城市 $\bar{x}_i$ 停留的車輛数是 c_{ii}，原在 $\bar{x}_i$ 的車輛数是 a_i。

問如何組織交通綫路，使在一定的时間 θ 内，到达 $\bar{y}$ 的車輛数达到极大？

取序积

$$X=\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{y}\}\times\{0, 1, 2, \cdots, \theta\}$$

作为頂点集合，来定义一个运輸网絡。

在頂点 $x_i(t)=(\bar{x}_i, t)$ 上，定义容量为 c_{ij} 的弧 $(x_i(t), x_j(t+t_{ij}))$ 及容量

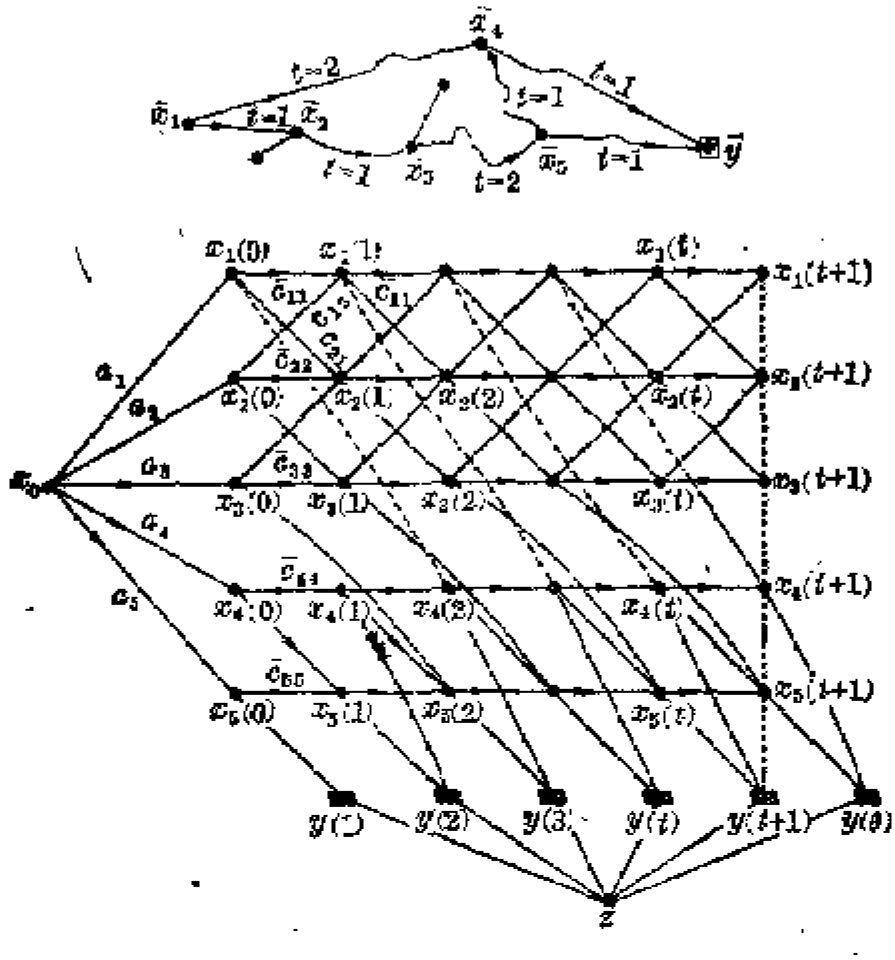


图 8-1 交通綫路图及与其相应的在不同时間地点的运輸网絡图

为 c_{ij} 的弧 $(x_i(t), x_i(t+1))$。用

$$\varphi(x_i(t), x_j(t+t_{ij}))$$

記在时間 t 自城市 x_i 送到 x_j 的車輛数，$\varphi(x_i(t), x_i(t+1))$ 便是在时間 t 停留在 x_i 的車輛数。最后，自发点 x_0 用容量为 a_i 的弧分别联到頂点 $x_i(0)$，而自 $y(1), y(2), \cdots, y(\theta)$ 各頂，用容量为 $+\infty$ 的弧，联到收点 z，运输网絡的极大流，便确定最优的交通綫路（見图 8-1）。

〔注〕 为了簡单起見，取 $z=x_{n+1}$，并用

$$c_i^j=\begin{cases}0 & 若\ (x_i, x_j)\notin U,\\ c(x_i, x_j) & 若\ (x_i, x_j)\in U,\end{cases}$$

$$\xi_i^j=\varphi(x_i, x_j)$$

来定义数 c_i^j 与 $\xi_i^j(i=0, 1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, n+1)$。

极大流問題，便归結为确定一組数 ξ_i^j，使

(1) $0\leqslant\xi_i^j\leqslant c_i^j \quad (i=0, 1, 2, \cdots, n;\ j=1, 2, \cdots, n+1)$，

(2) $\sum_{k=0}^{n}\xi_k^i-\sum_{j=1}^{n+1}\xi_i^j=0 \quad (i=1, 2, \cdots, n)$，

(3) $\sum_{i=0}^{n}\xi_{n+1}^i$ 极大化。

这是一个极为典型的綫性规划，不过所要寻求的那些数須是整数〔事实上，根据 (1), (2), (3) 的形式，整数解总存在〕。求解这个問題，单純形方法可以引用，可是在这里，我們所要介紹的方法，却十分簡单，可以用"手算"来解决一个极为龐大的网絡問題（一个 500 个頂点，4000 条弧的图，已在联合研究所按照这种方式予以解决）。

所有解决极大流問題的各种方法，其基本原則都是一样的。設 $A\subset X$ 是具下列性质的一个集合：

$$x_0\notin A,\quad z\in A.$$

内向过 A 的弧的集合 U_A^-，称为网絡的截集，数量

$$c(U_A^-)=\sum_{u\in U_A^-}c(u)$$

称为截集 U_A^- 的容量。

每一单位物資，自 x_0 送到 z，至少須通过 U_A^- 的某个弧一次，因而对于任何流 φ 及任何截集 U_A^-，恒有

$$\varphi_z \leqslant c(U_A^-)。$$

由此，对某一个流 φ 及某一截集 V，設有 $\varphi_z = c(V)$，则可以肯定，这个流必具有极大值(截集 V 則具有最小容量)。

平面图上确定极大流的法則 (福特-傅克逊，Ford-Fulkerson [2]) 在平面图上，寻求极大流，归結为按下列方法作一截集：

1° 用一条水平的直綫，联結 x_0 与 z，将图画在弧 (x_0, z) 之上，使弧与弧之間，除端点外不再相交。图既是平面的，現在便可采用恒取最左弧的方法，确定一条自 x_0 通到 z 的**最上路**(若前进受阻，便循原路折回)。

2° 在最上路 μ_1 上，确定容量最小的弧 $u_1 \in \mu_1$，去掉 u_1，且将路 μ_1 上各弧的容量减去 $c(u_1)$。按同样方法，重新寻求最上路 μ_2 及其上容量最小的弧 u_2。

3° 按照上面的方法，一直做到在頂点 x_0 与 z 之間，除弧 (x_0, z) 之外，不再有路相通；在每一条路 μ_k 上，相应地通过等于弧 u_k 容量(这个容量是 μ_k 作为最上路那个时刻的容量)的流量，便得所欲求的流。

現在来証明，这样的流 φ 具有极大值；事实上，一切不能自 x_0 用一条路通到的頂点，所成集合 A 是一个截集，显有

$$c(U_A^-) = \sum_{u \in U_A^-} c(u) = \varphi_z。$$

按前段所言，流 φ 具极大值。

确定极大流的一般法則 (福特与傅克逊[2]) 研究带有流 $\varphi(x, y)$ 的运輸网絡，自此出发，設法逐漸改进流值 φ_z。

1° 若 $\varphi(u) = c(u)$，謂弧 u 已被**飽和**；若自 x_0 到 z 的每一条路上，都至少有一个飽和弧，則謂这个流是**完备的**。

若流不完备，可以确定一条路 μ，其上所有的弧都不飽和(所用的就是第7章解問題1的法則：在所有非飽和弧所成部分图上，

导找自 x_0 通到 z 的路)。取

$$\varphi'(u)=\varphi(u)+1,\quad 若 u\in\mu,$$
$$\varphi'(u)=\varphi(u),\quad 若 u\notin\mu.$$

φ' 显是一个流，其值为

$$\varphi'_z=\varphi_z+1>\varphi_z.$$

由此可見甚易加大非完备流的值，且可以一直加大到完备为止。

2° 設 $\varphi(x, y)$ 是一个完备流；現在来用迭代方法，将图的所有頂点，記上号碼，以便将流的值增加一个单位：

記 x_0 以号碼：0。

若 x_i 是已記上号碼的頂点，則一切 $(x_i, y)\in U$, $\varphi(x_i, y)<c(x_i, y)$，且还沒有記上号碼的頂点 y，統記上号碼 $+i$。

若 x_i 已記上号碼，一切 $(y, x_i)\in U$, $\varphi(y, x_i)>0$，且还沒有記上号碼的頂点 y，統記上号碼 $-i$。

若采用这种方法，可以給 z 記上号碼，則自 x_0 到 z，必存在一条路 μ，其頂点各各不同，且各以其前一頂点的下标作为号碼(不論符号)。取

$\varphi'(u)=\varphi(u)$, 若 $u\notin\mu$,

$\varphi'(u)=\varphi(u)+1$, 若 $u\in\mu$，且 u 的方向，与鏈 μ 自 x_0 到 z 的走向相同，

$\varphi'(u)=\varphi(u)-1$, 若 $u\in\mu$，而 u 的方向，与鏈 μ 自 x_0 到 z 的走向相反(見图 8-2)。

显見 $\varphi'(u)$ 仍是一个流，且因 $\varphi'_z=\varphi_z+1$，流的值业已加大。

3° 設 φ^0 是一个流，已不再能用上面的方法，加大其值，卽謂已不能給 z 記上号碼，則流 φ^0 已取极大值。

事实上，設 A 是所有未記上号碼那些頂点所成的集合，因 $x_0\notin A$, $z\in A$，集合 A 确定一个截集 U_A^-，乃有

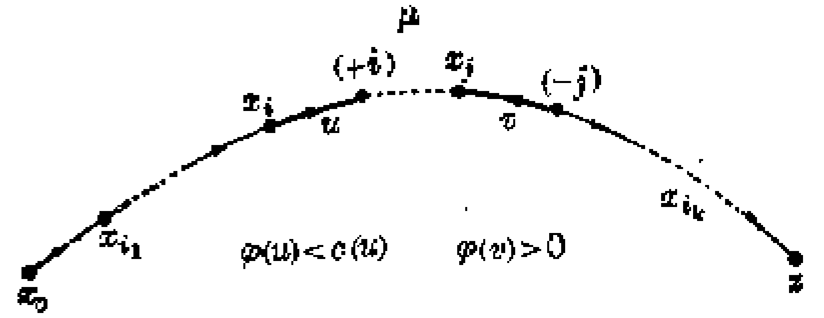


图 8-2

$$\varphi_z^0=\sum_{u\in U_A^-}\varphi^0(u)-\sum_{u\in U_A^-}\varphi^0(u)=\sum_{u\in U_A^-}c(u)+0=c(U_A^-).$$

流 φ^0 确具极大值。

由上所述，可以立即推得基本結論：

福特-傅克逊定理 在一个給定的运輸网絡上，流的极大值，等于截集的极小容量：

$$\max_{\varphi}\varphi_z=\min_{\substack{A\ni x_0\\ A\not\ni z}}c(U_A^-).$$

【例 3】 研究图 8-3 的运輸网絡，它具有完备流 φ，其所飽和的弧，統記以黑粗綫，其值是 $\varphi_z=6$。讀者可以立即求得值为 6 的极大流。

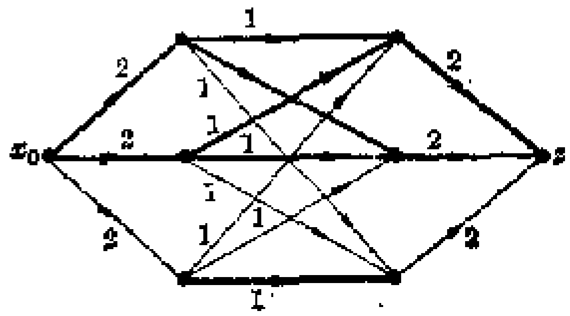


图 8-3

所应注意的，对于这样形式的网絡，可以采用下面的办法，直接求得极大流：将所輸送的流，一个单位一个单位地加大它的值，而当某些点能通过更大的流量时，便向这种点送去一个新单位，当流已完备，这个流便是极大的。

一般，成問題的是这种做法不是一个真正的法則，在絕大多数情况，这种做法虽很有效，但不一定总給出极大流，只用来做为初步逼近而已。

22 极小流問題

已給一个运輸网絡，現在要来求一个滿足下列关系的极小流：

(3')　　　$\varphi(u) \geqslant c(u) \quad (u \in U)$.

这个問題，和上面的問題很相近，也是經常遇到的。

【例1】偶图 (X, Y, Γ) 的极小复盖　所謂图的复盖，乃弧的一个集合 V，图的每一頂点，至少是其中某一弧的端点。問題是要求一个复盖 V，使 $|V|$ 尽可能地小。这个問題将在第18章用一般方法予以解决，但因图是对偶的，即图由两个互不相交的集合 X 与 Y 和一个自 X 到 Y 的映象所构成，这个問題則是一个极小流問題。

自发点 x_0 用容量为 $+1$ 的弧分別联到每一頂点 $x_i \in X$，再用容量为 $+1$ 的弧，分別自每一頂点 $y_j \in Y$ 联到收点 z，其他的弧，取其容量为0，极小流 φ，其中 $u \in U$，$\varphi(u) > 0$ 的那些弧，便构成一个极小复盖。

解极小流問題的法則　我們可以使用一种和求极大流十分相似的方法；即可以采用下面的方式，来解决这种問題：

1°　求一个流 φ_1，使对所有的 u，$\varphi_1(u) \geqslant c(u)$（其法是在最不飽和的弧上，継續增加一个单位的物資）。

2°　取 $c_2(u) = \varphi_1(u) - c(u)$，然后应用福特-傅克逊法則，作一个极大流 φ_2，使对每一 u，$\varphi_2(u) \leqslant c_2(u)$。

3°　由此，乃有

$$\varphi_1(u) - \varphi_2(u) \geqslant \varphi_1(u) - c_2(u) = c(u),$$

$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ 便是所欲求的极小流。

23　和一个数值集合相容的流的問題

现在来研究一种运输网絡，联系每一条弧的是一个正整数集合 $C(u)$，以替代原先的一个数 $c(u) \geqslant 0$。于此，可提出下列問題：

問題1　作一个流 $\varphi(u)$，使对每一 u，$\varphi(u) \in C(u)$。

問題2　作一个极大流 $\varphi(u)$，使对每一 u，$\varphi(u) \in C(u)$。

問題2包含問題1；設取

$$C(u) = \{0, 1, 2, \cdots, c(u)\},$$

则問題2也包含极大流問題。

【例1】(費嘯，R. A. Fisher) 有 n 个人 (1), (2), …, (n)，用这些人組成3-組，其中任二人不同时出現在 p 个以上不同的3-組中，問最多可以組成多少个3-組？这个問題归結为求图8-4里那个网絡的极大流，于此，$C(u)$ 即記在每条弧上。这样形式的問題，已被引进生物学里(名为"不完全的均衡分片設計")，为不同种类小麦病害的治疗，进行試驗；实际上，这个問題尚未能用以下的理論予以解决。

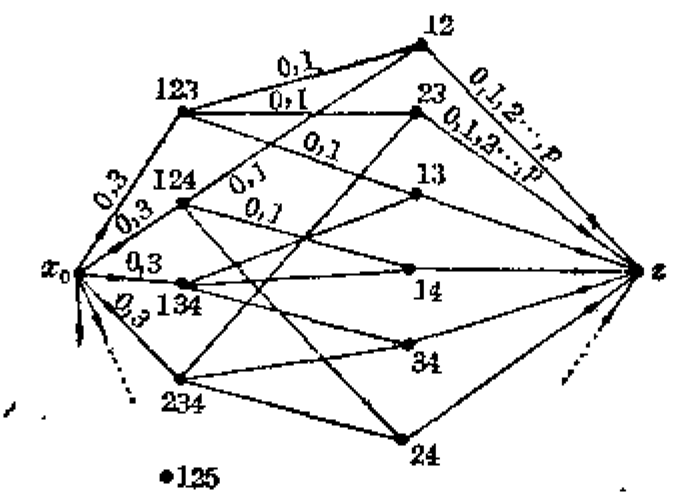


图 8-4

【例2】(霍夫曼-柯恩，Hoffman-Kuhn[5]) 設 X 是一个有限集合，$S_1, S_2, \cdots, S_n$ 是 X 的子集，$T_1, T_2, \cdots, T_p$ 是 X 的互不相交的子集，$b_1, b_2, \cdots, b_p, c_1, c_2, \cdots, c_p$ 都是整数 (对一切 i, $0 \leqslant b_i \leqslant c_i$)，試在 X 里求一集合 $Y=\{y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n\}$，使对一切 k, $y_k \in S_k$, 且滿足

$$b_i \leqslant |Y \cap T_i| \leqslant c_i \quad (i=1, 2, \cdots, p).$$

这个問題归結为确定图8-5上那个网絡的一个极大流 φ. 集合 Y 乃由 $\varphi(y, \bar{y})>0$ 的那些 y 所构成。本問題用以下的理論，可以完全解决。

首先来研究問題1的一个特殊情况：已給一个运輸网絡，其每一条弧 u，給以容量 $c(u)>0$，問是否存在流 $\varphi^0(u)$，滿足 $\varphi^0(u) \leqslant c(u)$，且飽和所有引向收点 z 的弧？

为了簡单起見，取

$$d(y) \begin{cases} c(y, z), & \text{当 } y \in \Gamma^{-1}z, \\ =0, & \text{当 } y \notin \Gamma^{-1}z. \end{cases}$$

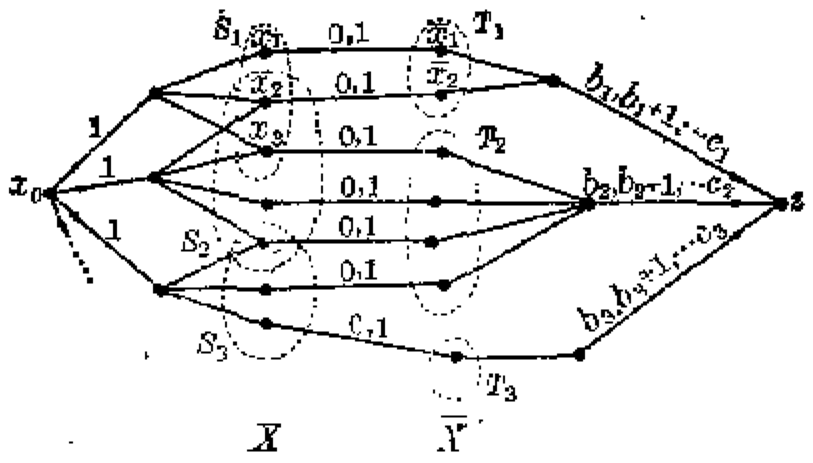


图　8-5

$d(y)$ 为 y 点的"需要"，要求予以满足。若 $A\subset X$，数量

$$d(A)=\sum_{y\in A}d(y)$$

同样称为集合 A 的"需要"。

照习惯，用 U_A^- 記所有内向过集合 A 的弧，用 U_A^+ 記所有外向过 A 的弧，用 $F(A)$ 記尽可能流入 A 的总流量(抹去 U_A^- 的一切弧之后)。最后，集合 V 的总容量記为

$$c(V)=\sum_{u\in V}c(u).$$

引理　設 $A_0\subset \bar{X}=X-\{x_0, z\}$；若对一切满足 $A_0\subset A\subset \bar{X}$ 的集合 A，有 $c(U_A^-)\geqslant d(A)$，则

$$F(A_0)\geqslant d(A_0).$$

事实上，考虑集合 $A_0\subset \bar{X}$，而将其化成一个收点 z_0，其做法是将 $U_{A_0}^+$ 的弧都去掉，然后将 A_0 所有的点和 z_0 等同起来；在这个新网絡上，按福特-傅克逊定理，其极大流量是

$$\min_{W} c(W)=F(A_0).$$

設 W_0 是由集合 $A(x_0\notin A,\ A\supset A_0,\ z\notin A)$ 定义的一个极小截集，则 $W_0=U_A^-$，于是

$$F(A_0)=c(W_0)=c(U_A^-)\geqslant d(A)\geqslant d(A_0).$$

定理 1 (盖尔，Gale [4])　已給一个运輸网絡，其每一弧 u 的

容量是 $c(u)\geqslant 0$；则当且仅当

(1) $$c(U_A^-)\geqslant d(A)\quad (A\subset \overline{X}=X-\{x_0, z\})$$

成立时，始存在一个流 φ^0，满足 $\varphi^0(u)\leqslant c(u)$，且饱和引向 z 的每一条弧。

1° 設存在一个流，飽和所有通向 z 的弧，則对一切 $A\subset\overline{X}$，有

$$c(U_A^-)\geqslant F(A)\geqslant d(A).$$

因而确有不等式 (1)。

2° 設不等式 (1) 成立，現在来考察由一个集合 $S(x_0\notin S, z\in S)$ 所确定的任一截集。取 $A=S-\{z\}$；按引理，有

$$d(A)\leqslant F(A)\leqslant c(U_A^-)$$
$$=c(U_S^-)-\sum_{x\notin A}c(x, z)=c(W)-d(X-A).$$

无論截集 W 如何，恒有

$$c(W)\geqslant d(A)+d(X-A)=d(X).$$

极大流 φ^0 遂满足

$$\varphi_z^0=\min_W c(W)\geqslant d(X).$$

这个流确饱和所有通向收点 z 的弧。

推理(飽和定理) 当且仅当

(2) $$F(Y)\geqslant d(Y)\quad (Y\subset\Gamma^{-1}z),$$

始存在一个流 φ，满足 $\varphi(u)\leqslant c(u)$，且饱和所有引向 z 的弧。

欲証这个推理，須証前定理的不等式 (1) 和不等式 (2) 等价。

(1)⇒(2)，盖按引理，有

$$F(A)\geqslant d(A)\quad (A\subset\overline{X}).$$

其特例

$$F(Y)\geqslant d(Y)\quad (Y\subset\Gamma^{-1}z)$$

自能成立。

(2)⇒(1)，盖若考虑集合 $A\subset\overline{X}$，且取 $Y=A\cap\Gamma^{-1}z$，恰有

$$d(A)=d(Y)\leqslant F(Y)\leqslant F(A),$$

定理1的一个重要推广，是下面的論断：

定理2（霍夫曼，Hoffman）[1] 設有一个运輸网絡，联系每一条弧有两个整数 $b(u)$ 与 $c(u)$ $[0 \leqslant b(u) \leqslant c(u)]$. 再設 $\mathscr{A}$ 是 X 的子集族，这些子集，或者不含 x_0 和 z，或者同时包含此二頂点。則当且仅当

$$c(U_A^-) \geqslant b(U_A^+) \quad (A \in \mathscr{A}),$$

才能存在流 φ，对每一 u，有 $b(u) \leqslant \varphi(u) \leqslant c(u)$.

設已給网絡 G，对每一条弧 u，有两个数 $b(u)$ 和 $c(u)$ 与之联系，与之相应，可按下列方式，作一网絡 $\bar{G}$，取 $\bar{c}(u)$ 为容量：用二点 $\bar{x}_0$ 和 $\bar{z}$ 联到 G 的頂点，作为 $\bar{G}$ 的发点与收点，对应于 G 的每一条弧 $u=(x, y)$，給以容量 $\bar{c}(u)=c(u)-b(u)$. 自发点 $\bar{x}_0$ 到頂点 y 联一条容量为 $\bar{c}(\bar{x}_0, y)=b(u)$ 的弧，自頂点 x 到收点 $\bar{z}$ 联一条容量为 $\bar{c}(x, \bar{z})=b(u)$ 的弧[2]，最后，自 z 到 x 联一条容量为

$$\bar{c}(z, x_0)=+\infty$$

的弧。

1° 茲往証下面的两个論断是等价的：

(1) 对于网絡 G，存在一个流 φ，使

$$b(u) \leqslant \varphi(u) \leqslant c(u).$$

(2) 对于网絡 $\bar{G}$，存在一个流 $\bar{\varphi}$，使 $\bar{\varphi}(u) \leqslant \bar{c}(u)$，且飽和所有引向收点 $\bar{z}$ 的弧。

(1)⇒(2)，盖若 φ 存在，可在 $\bar{G}$ 上，按以下各式，定义流 $\bar{\varphi}$：

$$\bar{\varphi}(u)=\varphi(u)-b(u) \quad \text{若 } u \in U,$$

$$\bar{\varphi}(x, \bar{z})=\sum_{y \in \Gamma x} b(x, y),$$

---

[1] 霍夫曼运用綫性規划的技巧，証明了这个定理，福特（L. Ford）則將其联系到网絡理論上來。

[2] $\bar{c}(\bar{x}_0, y)=b(u)$ 与 $\bar{c}(x, \bar{z})=b(u)$ 应分别作 $\bar{c}(\bar{x}_0, y)=\sum_{x \in \Gamma^{-1} y} b(x, y)$ 与 $\bar{c}(x, \bar{z})=\sum_{y \in \Gamma x} b(x, y)$；图8-6应作类似的更正。——譯者注

$$\bar{\varphi}(\bar{x}_0, y) = \sum_{x \in \Gamma^{-1}y} b(x, y),$$

$$\bar{\varphi}(z, x_0) = \varphi_z.$$

$\bar{\varphi}$ 即 $\bar{G}$ 上的一个流，飽和所有引向 $\bar{z}$ 的弧，蓋：

1) $\bar{\varphi}(u) = \varphi(u) - b(u) \geq b(u) - b(u) = 0$,

2) $\bar{\varphi}(u) = \varphi(u) - b(u) \leq c(u) - b(u) = \bar{c}(u)$,

3) $\sum_{u \in U_x^-} \bar{\varphi}(u) - \sum_{u \in U_x^+} \bar{\varphi}(u) = \sum_{u \in U_x^-} \varphi(u) - \sum_{u \in U_x^+} \varphi(u) = 0$.

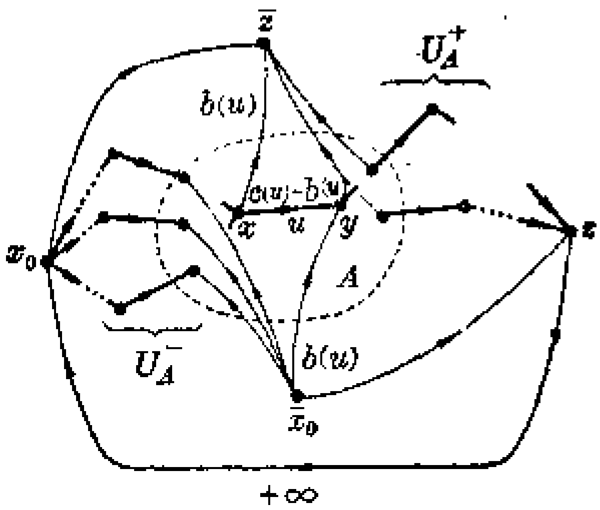


图 8-6

(2)⇒(1)，蓋若 $\bar{\varphi}$ 存在，用

$$\varphi(u) = \bar{\varphi}(u) + b(u) \quad (u \in U)$$

来定义函数 φ，則因

1) $\varphi(u) = \bar{\varphi}(u) + b(u) \geq 0 + b(u) = b(u)$,

2) $\varphi(u) = \bar{\varphi}(u) + b(u) \leq \bar{c}(u) + b(u) = c(u)$,

3) $\sum_{u \in U_x^-} \varphi(u) - \sum_{u \in U_x^+} \varphi(u) = 0$,

φ 确是 G 上的一个流，满足所要求的条件。

2° 由此，問題乃归結为求 (2) 能成立的必要和充分条件。对每一 $A \subset X$，取 $V_{\bar{A}}^-$ 表示 $\bar{G}$ 里所有内向过 A 的弧的集合，按前所述(定理 1)，条件 (2) 实与下式等价：

$$\bar{c}(V_{\bar{A}}^-) \geq \bar{d}(A) \quad (A \subset X),$$

若这个不等式，能被既不含 x_0 也不含 z 的一个集合 S 所满足，则对集合 $T=S\cup\{z\}$，由于

$$\bar{c}(V_{\bar{T}})\geqslant\bar{c}(V_{\bar{S}})\geqslant\bar{d}(S)=\bar{d}(T),$$

該式自也能被 T 所满足。

对集合 $R=S\cup\{x_0\}$，因 $\bar{c}(V_{\bar{R}})=+\infty$，該不等式总能被 R 所满足，因而，我們的討論，便可限制在族 $\mathscr{A}$ 的集合 A 上；不等式乃变为

$$\sum_{u\in U_A^-}\bar{c}(u)+\sum_{x\in A}\bar{c}(x_0,x)\geqslant\sum_{x\in A}\bar{c}(x,z)\quad(A\in\mathscr{A}),$$

即

$$\sum_{u\in U_A^-}(c(u)-b(u))+\sum_{u\in U_A^-}b(u)+\sum_{\substack{u=(x,y)\\x\in A\\y\in A}}b(u)$$

$$\geqslant\sum_{\substack{u=(x,y)\\x\in A\\y\in A}}b(u)+\sum_{u\in U_A^+}b(u)\quad(A\in\mathscr{A}),$$

亦即

$$c(U_A^-)\geqslant b(U_A^+)\quad(A\in\mathscr{A}).$$

当所給集合 $C(u)$ 是一个間隔，求解問題1与2的法則

1° 在一个网络 G 上，对每一条弧 u，給定二数 $b(u)$ 与 $c(u)$，$0\leqslant b(u)\leqslant c(u)$，求一个流 φ，使 $b(u)\leqslant\varphi(u)\leqslant c(u)$，实即在网络 $\overline{G}$（如前所定义）上，求一个极大流 $\bar{\varphi}$，而取

$$\varphi(u)=\bar{\varphi}(u)+b(u).$$

2° 这样得到的流 φ 不一定是一个极大流，但一个类似于福特-傅克逊法則的方法，能給它以极大值：

頂点 x_0，記以号碼 0.

若 x_i 已記上号碼，所有沒有記号碼的頂点 y，而又满足

$$(x_i,y)\in U,\qquad\varphi(x_i,y)<c(x_i,y)$$

的，記上号碼 $+i$.

若 x_i 已記上号碼，一切沒有記号碼的頂点 y，而又满足

$$(y, x_i) \in U, \qquad \varphi(y, x_i) > b(y, x_i)$$

的，記上号碼 $-i$。

按照这样方法，最后若将 z 記上号碼，象在福特-傅克逊法則一样，我們即能改进所得的流。

假使对一个流 φ^0，不能給 z 記上号碼，設不能記号碼的那些頂点所成集合为 A，則 $x_0 \notin A$，$z \in A$，φ^0 的值，便是

$$\varphi_z^0 = \sum_{u \in U_A^-} \varphi^0(u) - \sum_{u \in U_A^+} \varphi^0(u) = c(U_A^-) - b(U_A^+).$$

但另一方面，一个流的值，不能超过 $c(U_A^-) - b(U_A^+)$，流 φ^0 即是一个极大流。

定理 3 在一个运輸网絡上，若存在一个流 φ，对一切 u，能滿足 $0 \leqslant b(u) \leqslant \varphi(u) \leqslant c(u)$，則这样一个流的极大值是

$$\varphi_z = \min_{\substack{A \ni z \\ A \not\ni x_0}} (c(U_A^-) - b(U_A^+)).$$

24 无限运輸网絡

現在来研究由图 (X, Γ) 定义的运輸网絡，具容量 $c(u)$；但在本节，不再假定 $|X| < \infty$，茲往推广飽和定理。

定理 4 在一个无限网絡上，設 $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots\}$ 是和收点 z 相邻那些頂点所成的集合(設为可数的)；若这个图是有限回縮的，且除点 z 外，在其他一切点上又是 Γ^{-1}-有限的，則存在流 φ^0，飽和所有引向 z 的弧，其必要和充分条件是

$$F(A) \geqslant d(A) \quad (A \subset Y;\ |A| < \infty).$$

取 $Y_n = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，并用 X_n 表示，至少属于自 x_0 到 z 并过 Y_n 里一个点的一条路那些頂点的集合。

改变每一条弧的方向，且除去 z 点，則所得的图 Γ-有限，且有限扩張，按第 3 章定理 2 乃有

$$|(\hat{\Gamma}^{-1})y| < \infty \quad (y \in Y),$$

故集合

$$X_n=\bigcup_{k=1}^{n}(\hat{\Gamma}^{k-1})y_k\bigcup\{z\}$$

是有限的，而由其組成的子网絡 G_n 也是有限的。

用 Φ_n 表示网絡 G_n 上所有飽和收貨弧的流 φ_n 的集合[若 u 不是一条属于 G_n 的弧，取 $\varphi_n(u)=0$]。因 G_n 是一个有限网絡，故 $|\Phi_n|<\infty$；按蓋尔定理，更有 $\Phi_n\neq\varnothing$；最后，对于一切 $\varphi_n\in\Phi_n$，可以采用一个很明显的方式，作一个相应的流 φ_{n-1}，使 $\varphi_{n-1}\leqslant\varphi_n$；按寇尼希推理(第3章)，乃存在一个叙列 $(\varphi_1^0, \varphi_2^0, \cdots, \varphi_n^0, \cdots)$，其中

$$\varphi_1^0\leqslant\varphi_2^0\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n^0\leqslant\cdots,$$

且对每一 n，有 $\varphi_n^0\in\Phi_n$。

取 $\varphi^0(u)=\sup\varphi_n^0(u)$，茲往証这就是和网絡 G 相容的一个流。

若 $a\neq z$，所有内向过 a 那些弧的集合 U_a^- 是有限的，故存在整数 p，使

$$\varphi_p^0(u)=\varphi^0(u)\quad(u\in U_a^-),$$

其中 φ_p^0 是网絡 G_p 的一个流，遂有

$$\sum_{u\in U_a^+}\varphi^0(u)=\sum_{u\in U_a^+}\varphi_p^0(u)=\sum_{u\in U_a^-}\varphi_p^0(u)=\sum_{u\in U_a^-}\varphi^0(u).$$

由此可見 φ^0 是一个流；且因

$$\varphi^0(u)=\sup_n\varphi_n^0(u)\leqslant c(u)\quad(u\in U),$$

这个流满足关于容量的要求。

最后，显見这个流飽和所有的收貨弧，因而恰是所欲求的。

第9章 半次定理

25 内半次或外半次

为了更一般起见，本章将不研究图，而研究多重图。設 p 是一个整数，若在 U 里有多个不同的弧，連接同一对頂点(按同一方向)，而每一对頂点上，这样弧的个数总 $\leqslant p$，则称多重图 (X, U) 是一个 p-图。

已給一个 p-图，其頂点为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，外向过頂点 x_k 的弧的个数，称为頂点 x_k 的**外半次**，即

$$d^+(x_k) = |U^+_{x_k}|.$$

同样，頂点 x_k 的**内半次**是内向过 x_k 的弧的个数，即

$$d^-(x_k) = |U^-_{x_k}|.$$

若 $d^+(x) = d^-(x) = 0$，称頂点 x 为**孤立点**；若 $d^+(x) \neq 0$, $d^-(x) = 0$，称 x 为**发点**，若 $d^+(0) = 0$, $d^-(x) \neq 0$，称 x 为**收点**。

已給整数 $r_1, r_2, \cdots, r_n, s_1, s_2, \cdots, s_n$，問是否存在一个 p-图，其頂点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 滿足：

$$d^+(x_k) = r_k,$$

$$d^-(x_k) = s_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

这就是本章所要解决的問題。

定理 1 (半次定理) 設 $(r_1, s_1), (r_2, s_2), \cdots, (r_n, s_n)$ 等是由两个整数构成的数对，經調动其下标之后，假定

$$s_1 \geqslant s_2 \geqslant \cdots \geqslant s_n \geqslant 0.$$

当且仅当

(1) $\sum_{i=1}^{n} \min\{pk, r_i\} \geqslant \sum_{j=1}^{k} s_j \quad (k = 1, 2, \cdots, n),$

(2) $\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{j=1}^{n} s_j$,

数对 (r_k, s_k) 构成一个 p-图的牟次。

对应于数对 (r_k, s_k) 所成的集合，作运輸网络 G，由頂点 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n$ 及发点 x_0 收点 z 所构成，頂点 $x_i, \bar{x}_j$ 联以容量为 $c(x_i, \bar{x}_j)=p$ 的弧，頂点 x_0, x_i，联以容量为 $c(x_0, x_i)=r_i$ 的弧，而頂点 $\bar{x}_j$ 与 z 則联以容量为 $c(\bar{x}_j, z)=s_j$ 的弧。

每一个流，飽和网絡 G 的收貨弧与发貨弧的，确定一个 p-图 (X, U)，取 (r_k, s_k) 为其次；反之，每一 p-图 (X, U)，取 (r_k, s_k) 为其次的，則确定网絡 G 上的一个流，飽和所有收貨弧与发貨弧。按飽和定理(第8章)，有这样的流存在的必要和充分条件是(2)和能送到每一集合 $A=\{\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \cdots, \bar{x}_{i_k}\}$ 的极大流量超过 A 的需要，即

$$F(\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \cdots, \bar{x}_{i_k}) \geqslant d(\bar{x}_{i_1}, \bar{x}_{i_2}, \cdots, \bar{x}_{i_k}) \quad (k \leqslant n;\ i_1 < i_2 < \cdots < i_k),$$

或

$$(1') \qquad \sum_{i=1}^{n} \min\{r_i, pk\} \geqslant s_{i_1} + s_{i_2} + \cdots + s_{i_k}$$

$$(k \leqslant n;\ i_1 < i_2 < \cdots < i_k).$$

显有 $(1') \Rightarrow (1)$，又因 s_j 是按遞降順序排列的，故 $(1) \Rightarrow (1')$；因此确有定理所述的条件。

取 $p=1$，这个定理便提供了数对 (r_k, s_k) 是一个图的牟次的充分和必要条件。我們可以进一步将这个結果，改成另一种形式，使其便于驗証。設

$$\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \cdots)$$

是一个有限的整数序列(按遞降順序排列)，与其相应，可作另一数列 $\boldsymbol{r}^* = (r_1^*, r_2^*, \cdots)$，其中 r_k^* 表示在 r_i 中超过或等于 k 的那些数的个数。数列 $\boldsymbol{r}^*$ 称为数列 $\boldsymbol{r}$ 的对偶 [讀者可驗証 $(\boldsymbol{r}^*)^* = \boldsymbol{r}$]。于是有

推理[1] 已給由两个整数构成的許多数对 (r_k, s_k)，分别改变 r_k 与 s_k 的下标，使

$$r_1 \geqslant r_2 \geqslant \cdots \geqslant r_n{}^{(2)},$$
$$s_1 \geqslant s_2 \geqslant \cdots \geqslant s_n.$$

作 $r=(r_1, r_2, \cdots)$ 的对偶序列 $r^*=(r_1^*, r_2^*, \cdots)$，并用附上若干 0 的办法，使 r^* 与 s 有相同的长度 m。

所給数对构成一个图的次，其必要和充分条件为

$$r_1^*+r_2^*+\cdots+r_k^* \geqslant s_1+s_2+\cdots+s_k \quad (k<m),$$
$$r_1^*+r_2^*+\cdots+r_m^* = s_1+s_2+\cdots+s_m.$$

若能証明对每一整数 k，恒有

$$\sum_{i=1}^{n} \min\{k, r_i\} = \sum_{j=1}^{k} r_j^*,$$

则这个推理便可立即自前面的定理推出。

当 $k=1$，等式是成立的；若其对任一整数 k 能成立，则对于 $k+1$，等式亦必成立，盖：

$$\sum_{i=1}^{n} \min\{(k+1), r_i\} = \sum_{r_i \leqslant k} \min\{k, r_i\} + \Big(\sum_{r_i > k} \min\{k, r_i\} + r_{k+1}^*\Big)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \min\{k, r_i\} + r_{k+1}^* = r_1^*+r_2^*+\cdots+r_{k+1}^*.$$

得所欲証。

【例1】 旅行問題 在一次旅行中，m 个家庭，搭乘 n 辆車，这些家庭分别有 $r_1, r_2, \cdots, r_m$ 个成員，而 n 辆車則分別有 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 个座位。若每个家庭的每两个成員，不乘同一辆車，問所有的人都能乘車出发，是否可能？这个問題可以归結为作出一个偶图，具有已給的内半次与外半次；这个图由下二集合确定：

---

[1] 这个条件似是蓋尔(Gale)[1]所首創，但可注意者，按哈代-立特渥德-波立亚(Hardy-Littlewood-Polya)的一个著名定理，这些不等式，实际表示向量 r^* 是向量 s 在一个双随机线性变换下的象[欲知其証，可看 [E. T. F. M.] 第 8 章]。

[2] 此式应删。——譯者注

$$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}, \qquad Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\},$$

x_k 的半次是 $(r_k, 0)$，y_k 的半次是 $(0, s_k)$.

为了明确問題的意义，取

座 位 数：$s_k=5, 5, 4, 4, 4, 3, 2, 1, 1, 1,$

家庭成員数：$r_k=8, 8, 5, 5, 4.$

对偶数列由下列各数构成：

$$r_1^*=r_2^*=r_3^*=r_4^*=5;\ \ r_5^*=4;\ \ r_6^*=r_7^*=r_8^*=2.$$

兹往驗証这个問題是可能的：

$$\begin{aligned}
5&\geqslant 5,\\
5+5=10&\geqslant 5+5=10,\\
10+5=15&\geqslant 10+4=14,\\
15+5=20&\geqslant 14+4=18,\\
20+4=24&\geqslant 18+4=22,\\
24+2=26&\geqslant 22+3=25,\\
26+2=28&\geqslant 25+2=27,\\
28+2=30&\geqslant 27+1=28,\\
30&\geqslant 28+1=29,\\
30&=29+1=30.
\end{aligned}$$

問題既是可能的，便可将其作为极大流問題来加以解决。

設对一組已給的半次，已作出图 $G=(X, U)$，現在来研究具下列性质的頂点 x, x', y, y'：

$$x\neq x', \qquad y\neq y'$$

$$(x, y)\in U, \quad (x', y')\in U$$

$$(x, y')\notin U, \quad (x', y)\notin U.$$

若用弧 (x, y') 与 (x', y) 来替代弧 (x, y) 与 (x', y')，則得一个图，具同样的半次：这样的替换，称为**变形**；由于下面的定理，可見其重要性。

定理 2 若 $G=(X, U)$ 与 $H=(X, V)$ 是两个图，在每一頂点上都具相同的半次，則 H 可自 G 經过有限个变形得来。

可以假定G与H没有公共弧，盖若不然，将这些公共弧去掉，定理实无改变。联系图G，作一矩阵$A=(a_j^i)$，具n行与n列，其元素

$$a_j^i\begin{cases}=0 & 若\ (x_i, x_j)\notin U,\\ =1 & 若\ (x_i, x_j)\in U.\end{cases}$$

与图H相应，同样作一矩阵$B=(b_j^i)$；按定理的假設，有

$$\sum_{j=1}^n a_j^i=\sum_{j=1}^n b_j^i=d^+(x_i),$$

$$\sum_{i=1}^n a_j^i=\sum_{i=1}^n b_j^i=d^-(x_j).$$

矩陣$C=A-B$，按定义由元素$c_j^i=a_j^i-b_j^i$所构成，这些元素等于$+1$，0或-1，同一行或同一列上諸元素之和为零。

若$\sum_{i,j}|c_j^i|=0$，图G与H相重合，若$\sum_{i,j}|c_j^i|>0$，茲往証經过在图G上的继續变形，可以得一矩陣$\bar{C}=\bar{A}-B=(\bar{c}_j^i)$，而$\sum_{i,j}|\bar{c}_j^i|<\sum_{i,j}|c_j^i|$。重复这种做法，最后可得图$\bar{G}$，与$H$相合。

設c_j^i是等于$+1$的一个元素；每一列有同样多的$+1$与-1，故在第j列上应存在一个元素$c_j^k=-1$。同样，在第k行上存在一个元素$c_l^k=+1$，然后在第l列上有一个$c_l^m=-1$，等等。这样乃确定了一条路c_j^i，c_j^k，c_l^k，c_l^m，…，c_r^s，c_r^i。若在某个时候，行进到曾經到过的第q列上，而所遇到的点$c_q^p=+1$，先未到过，这时可以行进到先前还未用过的点$c_q^h=-1$上（这总是可能的，因q列有同样

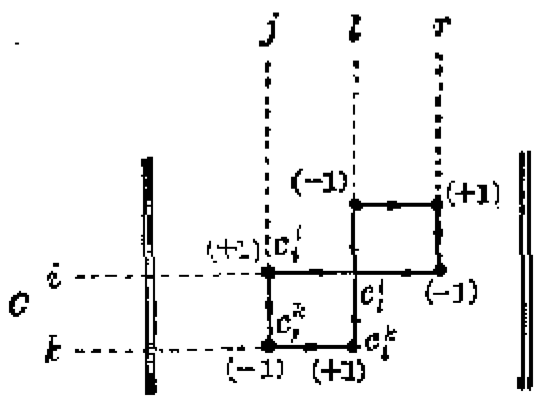


图 9-1

多的 $+1$ 与 -1)。矩陣是有限的,迟早总会回到原先的出发点 c_j^i,因而也就形成了一条初級回路。

考察正方形:c_j^i, c_j^k, c_l^k, c_l^i;若 $c_l^i=-1$,作变形

$$(x_i, x_j)\rightarrow(x_i, x_l),$$

$$(x_k, x_l)\rightarrow(x_k, x_j).$$

由此得一矩陣 $\bar{C}$,其 $\bar{c}_j^i=\bar{c}_j^k=\bar{c}_l^k=\bar{c}_l^i=0$ (其他元素,保持不变),这已达到了目的。若 $c_l^i=0$, $(x_i, x_l)\notin U$(因原設 H 与 G 的公共弧均已消去),但同样的变形,将使 $\bar{c}_j^i=\bar{c}_l^k=\bar{c}_j^k=0$, $\bar{c}_l^i=1$,这也达到了目的。只有在 $c_l^i=+1$ 时,上面的做法行不通,但此时可将原先的初級回路,代以更短的初級回路 c_l^i, c_l^m, $\cdots$, c_r^i, c_l^i。

若定理仍未得証,一步一步縮短回路,直至最后,得一唯一的正方形,其頂点上的元素为 $+1$, -1, $+1$, -1;在这种情况,很明显一个变形,便能达到目的。定理証毕。

现在来考察一种情况,其中

$$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n\},$$

$$d^+(x_i)=+1, \quad d^-(x_i)=0,$$

$$d^+(y_j)=0, \quad d^-(y_j)=+1.$$

这样确定的图,对应于数字 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列,定理2乃轉化为一个众所周知的論断:

若 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 是一个排列,經过若干次两个数字的对换,可以得到任意一个先已給定的排列。

第10章 偶图的对集

26 极大对集問題

本章只討論偶图(X, Y, Γ)，所謂偶图，乃由两个互不相交的集合X和Y及一个自X到Y的多值映象Γ所确定。以后(第18章)还将在任意的图上研究同样的問題，但所用技巧，与此不同。首先假定图是有限的。

所謂偶图(X, Y, Γ)的一个**对集**，乃其弧的一个集合W，其中沒有二弧相邻；若一个对集，在一个集合$A\subset X$和一个集合$B\subset Y$上，作出一个一一对应，則謂已将集合A**在集合**B**上配成了对**，或称A**在**Y**里配成了对**。現在要求解决的是确定对集弧的极大个数。

【例1】 人力分配問題 一个机关，共录用p个工作人員$x_1, x_2, \cdots, x_p$，共有p个工作崗位$y_1, y_2, \cdots, y_p$，其中每个工作人員，熟习一种或几种工作。問是否可能将每个工作人員安排在他所熟习的一种工作崗位上？設用Γx_i表示工作人員x_i所熟习的工作的集合，则这个問題便归結为研究偶图(X, Y, Γ)，而把X在Y里配对。

【例2】 男学生和女学生問題 在一个男女合校里，每个女孩有m个男友，而每个男孩有m个女友，問是否可能在一次跳舞会中，每个女孩恰和其一个男友，而每个男孩恰和其一个女友共同起舞？不久即可見問題的回答是肯定的(推理2)。

定理1(寇尼希-霍尔，König-Hall) 当且仅当对每一集合$A\subset X$，有$|\Gamma A|\geqslant|A|$，則X可在Y里配对。

現在来研究由X，Y里的点和发点x_0收点z所定义的运輸网絡；自x_0到每一点$y_j\in Y$联以容量为$c(x_0, y_j)=1$的弧，自每一点$x_i\in X$到z联以容量为$c(x_i, z)=1$的弧，而每当$y_j\in\Gamma x_i$，則

自 y_j 到 x_i 联以容量为 ∞ 的弧。若 $A\subset X$，则集合 A 的总需要量是 $d(A)=|A|$，可以送进 A 的极大流量是 $F(A)=|\Gamma A|$。

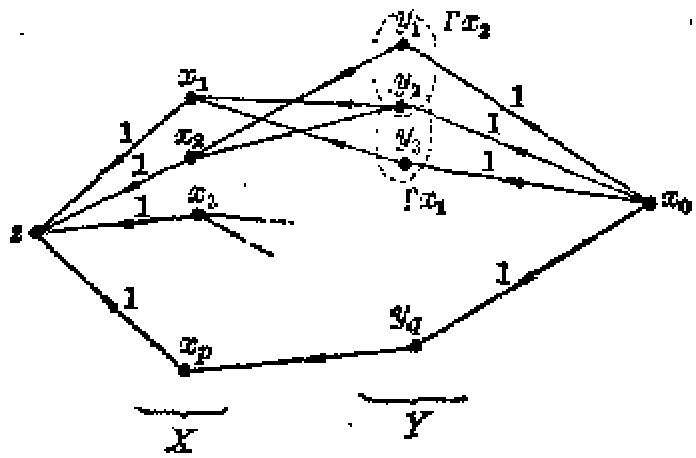


图 10-1

偶图的每一个流，确定偶图的一个对集，点 x_i 与 y_j 则因有一个单位的流量通过弧 (y_j, x_i) 而相对应；反之，每一对集则确定一个流。当且仅当极大流能饱和每一条收货弧，X 便在 Y 里配成了对，根据饱和定理(第8章)，这个条件便是

$$F(A)\geqslant d(A)\quad (A\subset X),$$

或
$$|\Gamma A|\geqslant|A|\quad (A\subset X).$$
証毕

由此，极大对集的确定，便是一个极大流的問題，因而可以采用福特-傅克逊法则(第8章)。

推理 1 在偶图 (X, Y, Γ) 上，$|X|=p$，$|Y|=q$，且其顶点 $x_i\in X$ 与 $y_j\in Y$ 的顺序按下法编排：

$$|\Gamma x_1|\leqslant|\Gamma x_2|\leqslant\cdots\leqslant|\Gamma x_p|,$$
$$|\Gamma^{-1}y_1|\geqslant|\Gamma^{-1}y_2|\geqslant\cdots\geqslant|\Gamma^{-1}y_q|.$$

X 能在 Y 里配对的充分条件是：

(1) $$|\Gamma x_1|+|\Gamma x_2|+\cdots+|\Gamma x_k| > |\Gamma^{-1}y_1|+|\Gamma^{-1}y_2|+\cdots+|\Gamma^{-1}y_{k-1}|\quad (k=1, 2, \cdots, p).$$

事实上，研究两个分别有 k 与 $k-1$ 个元素的集合：

$$A=\{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}\} 与 B=\{y_{j_1}, y_{j_2}, \cdots, y_{j_{k-1}}\};$$

据(1),有

$$|\Gamma x_{i_1}|+|\Gamma x_{i_2}|+\cdots+|\Gamma x_{i_k}|$$
$$>|\Gamma^{-1}y_{j_1}|+|\Gamma^{-1}y_{j_2}|+\cdots+|\Gamma^{-1}y_{j_{k-1}}|.$$

自 A 发出的弧的个数,大于引进 B 的弧的个数,故无論 B 是任何含有 $k-1$ 个元素的集合,$\Gamma A\not\subset B$; 因而 $|\Gamma A|>k-1=|A|-1$,或

$$|\Gamma A|\geqslant|A| \quad (A\subset X).$$

故能将 X 在 Y 里配对。

推理 2 对于一个偶图 (X, Y, Γ),若存在整数 m,使对一切 $x\in X$ 有 $|\Gamma x|\geqslant m$,对一切 $y\in Y$,有 $|\Gamma^{-1}y|\leqslant m$,則 X 能在 Y 里配对。

事实上,上一推理的条件,于此能成立。

推理 3 在偶图 (X, Y, Γ) 里,取

$$m=\max\{|\Gamma x|, |\Gamma^{-1}y|/x\in X, y\in Y\};$$

則存在对集,使用所有 $|\Gamma x|=m$ 和 $|\Gamma^{-1}y|=m$ 的顶点 x 和 y.

1° 首先証明可以作出一个偶图 (X', Y', Γ'),其所有頂点都是 m 次,且以图 (X, Y, Γ) 作为其部分子图。

照样作出图 (X, Y, Γ) 的 m 个模型:

$$(X^1, Y^1, \Gamma), (X^2, Y^2, \Gamma), \cdots, (X^m, Y^m, \Gamma);$$

若頂点 $x\in X$,使 $m-|\Gamma x|=k>0$,便考虑与之相应的那些頂点 $x^1\in X^1, x^2\in X^2, \cdots, x^m\in X^m$,将这些点用弧联到下列集合的所有頂点:

$$Y(x)=\{y(1, x), y(2, x), \cdots, y(k, x)\},$$

这个集合,由 k 个点組成,是因为需要而添加进来的。按照这个办法,做完所有的点 $x\in X$ 之后,接着便来考虑点 $y\in Y$,同样自这些点联到一个添加的頂点集合 $X(y)$,等等。

取 $$X'=\bigcup_{i\leqslant m}X^i\cup\bigcup_{y\in Y}X(y),$$

$$Y'=\bigcup_{j\leqslant m}Y^j\cup\bigcup_{x\in X}Y(x).$$

由 X', Y' 及联接的弧所构成的偶图，确具所提出的条件，且取(X^1, Y^1, Γ)作为其部分子图。

于此，尚須注意$|X'|=|Y'|$.

2° 据推理2,在新图上，可将X'在Y'里配对；每一点$x^1\in X^1$，其$|\Gamma x^1|=m$的，在Y^1里有一点与之对应，而每一点$y^1\in Y^1$，其$|\Gamma^{-1}y^1|=m$的，在X^1里有一点与之对应；因而在图(X^1, Y^1, Γ)上存在一个对集，恰好使用所有这样的顶点。

推理4 偶图(X, Y, Γ)的色級是

$$m=\max\{|\Gamma x|, |\Gamma^{-1}y|/x\in X, y\in Y\}.$$

欲証这个推理，須証能用m种不同的颜色，涂染这个图的弧，使每二邻弧，具有不同的颜色。用第一种颜色，涂染使用半次为m的一切頂点那个对集所有的弧；然后用第二种颜色，涂染使用所余图里半次最大那些頂点的对集所有的弧，等等。根据上一推理，这些对集都存在，且每做一次，图的极大半次减少一个单位。因此，用m种颜色，卽足以涂染图(X, Y, Γ)的一切弧。

【例3】 拉丁方形　上面的推理4，在尤拉(Euler)首創的拉丁方形理論里，有一个奇特的应用。設将一个$n\times n$方形里的格子，填以字母$y_1, y_2, \cdots, y_n$，使在同一行与同一列內，沒有相同的字母，便謂已构成了一个n阶的拉丁方形。为了判断一个由字母构成的长方形，是否能为某一拉丁方形的一部分，可以使用下面的定理：

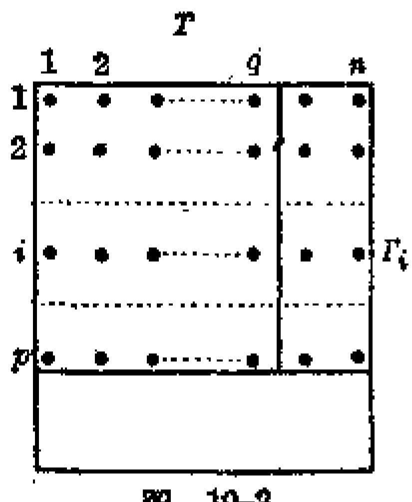


图　10-2

設T是一个$p\times q$的长方形，填以字母$y_1, y_2, \cdots, y_n$，在同一行与同一列里沒有相同的字母，再設$m(y)$是字母y在T里出現的次数；将这个长方形补上$n-p$行与$n-q$列，来构成一个$n\times n$的拉丁方形，其必要和充分条件是：

$$m(y_k)\geqslant p+q-n\quad(k=1, 2, \cdots, n).$$

1° 条件是必要的：設 Γi 是在 T 的第 i 行里沒有出现的那 $n-q$ 个字母的集合，再設 $m'(y)$ 为字母 y 在 $\Gamma 1, \Gamma 2, \cdots, \Gamma p$ 里出現的次数；若能构成一个拉丁方形，应有 $m'(y) \leqslant n-q$，因有

$$m(y)=p-m'(y) \geqslant p-n+q.$$

2° 条件是充分的：事实上，取 $P=\{1, 2, \cdots, p\}$，$Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$，并定义 Γi 如上，现在来研究偶图 (P, Y, Γ)；于此，有

$$|\Gamma i|=n-q \quad (i \in P),$$

$$|\Gamma^{-1} y|=m'(y) \leqslant n-q \quad (y \in Y).$$

据推理 4，可将这个图的弧用藍、紅等 $n-q$ 种顏色加以涂染。現在便可添加 $n-q$ 列将 T_1 加以扩充：自 P 出发，涂上藍色的那些弧，其終点构成第一列，其第二列則是自 P 出发，涂以紅色的那些弧的終点，等等。由此，得一 $p \times n$ 的长方形 $\bar{T}$，然因 $\bar{m}(y)=p=(p+n)-n$，$\bar{T}$ 仍滿足定理的条件；現在便可以将行换成列进行同样的研究。

27 偶图的欠数

已給偶图 $G=(X, Y, \Gamma)$，数

$$\delta_0=\max_{A \subset X}(|A|-|\Gamma A|)$$

称为图 G 的**欠数**。

恒有 $\delta_0 \geqslant 0$（因 $|\varnothing|-|\Gamma \varnothing|=0$），故寇尼希-霍尔定理也可叙述如次：能将 X 在 Y 里配对的必要和充分条件是 $\delta_0=0$．兹往改进这个結果，更明确一点說，便是要来估計对集里弧的极大个数。

首先来提出一个概念，在偶图 $G=(X, Y, \Gamma)$ 里，取集合 $C \subset X \cup Y$，若偶图的任一弧，均至少有一个端点位于 C 内，則 C 称为偶图的**負荷集**。这个概念本身相当重要，关于这个概念，有以下一些結論：

定理 2 在偶图 $G=(X, Y, \Gamma)$ 里，負荷集 C 的元素个数的极小是 $|X|-\delta_0$.

事实上，取 $B=X-A$，有

$$
\begin{aligned}
|X|-\delta_0 &= |X|-\max_{A\subset X}(|A|-|\Gamma A|)\\
&=\min_{A\subset X}(|X|-|A|+|\Gamma A|)\\
&=\min_{B\subset X}(|B|+|\Gamma(X-B)|).
\end{aligned}
$$

集合 $B\cup\Gamma(X-B)$ 是一負荷集，而每一极小負荷集都是这种形式，因而恰有所述的結論。

定理 3　偶图 $G=(X, Y, \Gamma)$ 的內固数是 $\alpha(G)=|Y|+\delta_0$。

事实上，若 C 是一个負荷集，其补集 $S=(X\cup Y)-C$ 便是一个內固集（任一弧，其两个端点，不可能都在 S 内）；反之，若 S 是一个內固集，其补集便是一个負荷集。因此，

$$
\begin{aligned}
\alpha(G) &=\max_S|S|=\max_C(|X|+|Y|-|C|)\\
&=|X|+|Y|-\min_C|C|\\
&=|X|+|Y|-(|X|-\delta_0)=|Y|+\delta_0.
\end{aligned}
$$

〔注〕定理 3 也可以用另一种方式来叙述。在任一图里，用 $\Delta x=\{y/y>x\}$ 表示頂点 x 的后继元素集合（見第 2 章），而两个頂点 x_1 与 x_2 既不 $x_1>x_2$，也不 $x_2>x_1$，則謂这两点是无关的。在偶图 (X, Y, Γ) 里，有

$$\Delta x=\Gamma x,\ 若\ x\in X,$$
$$\Delta x=\varnothing,\ 若\ x\in Y.$$

定理 3 遂可改述如次：在偶图里可能求得的两两无关頂点的极大个数是

$$\max_{A\subset X\cup Y}(|A|-|\Delta A|).$$

可注意的是这一結論，可以推广到任何图上[1]。

---

(1) 其証如次：若 (X, Γ) 是已給的有限图，作偶图 $(X, \bar{X}, \Delta)$，表示每一頂点的后继元素。現在来研究一个极小包集 $C=(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots; \bar{x}_{j_1}, \bar{x}_{j_2}, \cdots)$.

1° 首先証明这些頂点的下标統相异。事实上，若 $i_1=j_1$，則将存在一个下标 $k\neq i_1, i_2, \cdots$，使

$$\bar{x}_{i_1}\in\Delta x_k$$

（因 $C-\{\bar{x}_{i_1}\}$ 比 C 少一点，已不再是一个包集）；同样，也存在一个下标 $h\neq j_1, j_2, \cdots$ 使

$$\bar{x}_h\in\Delta x_{i_1}.$$

现在研究偶图的欠数与其对集弧的极大个数，二者間的联系。

引理 1 若就 $A\subset X$，取 $\delta(A)=|A|-|\Gamma A|$，则

$$\delta(A_1\cup A_2)+\delta(A_1\cap A_2)\geqslant\delta(A_1)+\delta(A_2).$$

事实上，

$$|A_1\cup A_2|+|A_1\cap A_2|=|A_1|+|A_2|,$$

$$|\Gamma(A_1\cup A_2)|+|\Gamma(A_1\cap A_2)|\leqslant|\Gamma A_1\cup\Gamma A_2|+|\Gamma A_1\cap\Gamma A_2|$$
$$=|\Gamma A_1|+|\Gamma A_2|.$$

自第一式减去第二式，便得欲証。

引理 2 族 $\mathscr{A}=\{A/\delta(A)=\delta_0\}$，按运算 $\cup$ 与 $\cap$ 成一个格；其意即：

$$A_1,\ A_2\in\mathscr{A}\Rightarrow A_1\cup A_2\in\mathscr{A},\ A_1\cap A_2\in\mathscr{A}.$$

事实上，若 $A_1,\ A_2\in\mathscr{A}$，按引理 1，有

$$\delta(A_1\cup A_2)+\delta(A_1\cap A_2)\geqslant\delta(A_1)+\delta(A_2)=2\delta_0.$$

但 $\delta(A_1\cup A_2)$ 与 $\delta(A_1\cap A_2)$ 二者都不能超过 δ_0，故必有 $\delta(A_1\cup A_2)=\delta(A_1\cap A_2)=\delta_0$，遂得欲証。

引理 3 若 $\delta_0>0$，则 $\mathscr{A}$ 的交集 A_0 是 $\mathscr{A}$ 的一个集合且非空。

因图是有限的，A_0 是 $\mathscr{A}$ 的有限个集合的交集，故按前一引理，$A_0\in\mathscr{A}$；又若 $A_0=\varnothing$，则

$$\delta_0=\delta(A_0)=\delta(\varnothing)=0,$$

这和原設 $\delta_0>0$ 相違。

定理 4 (寇尼希-傲尔，König-Orə) 在一个偶图里，对集弧

然 $$x_k<x_{i_1},\ x_{i_1}<x_h\Rightarrow x_k<x_h,$$
这和弧 $(x_k,\ \bar{x}_h)$ 沒有一个頂点在包集 C 內这一事实相矛盾。

2° 在图 (X,Γ) 里，研究集合 $S=X-\{x_{i_1},x_{i_2},\cdots;\ x_{j_1},x_{j_2},\cdots\}$；其頂点两两无关，且为具此性质的一个极大集合，故由定理 2，有

$$|S|=|X|-|C|=|X|-[|X|-\max_{A\subset X}(|A|-|\Delta A|)]$$
$$=\max_{A\subset X}(|A|-|\Delta A|).$$

的极大个数是 $|X|-\delta_0$。

若 $\delta_0=0$，則定理已証(据寇尼希-霍尔定理)。故設 $\delta_0>0$，且考察所有 $\delta(A)=\delta_0$ 那些集合 A 的交集 A_0(非空)。

1° 若自原图去掉一点 $x_0\notin A_0$，其欠数不变。事实上，新图的欠数 $\delta_0'\leqslant\delta_0$；但新图含有集合 A_0，其 $\delta(A_0)=\delta_0$，故 $\delta_0'=\delta_0$。

2° 若自原图去掉一点 $x_0\in A_0$，則图的欠数恰减少一个单位。事实上，所有 $\delta(A)=\delta_0$ 的集合 A 都去掉了 x_0，故新图的欠数 $\delta_0'<\delta_0$；因而集合 $A_0'=A_0-\{x_0\}$ 满足

$$\delta(A_0')=|A_0|-1-|\Gamma A_0'|<\delta_0=|A_0|-|\Gamma A_0|,$$

遂有
$$|\Gamma A_0'|\geqslant|\Gamma A_0|.$$

但因 $A_0'\subset A_0$，也有相反的不等式，故

$$|\Gamma A_0'|=|\Gamma A_0|;$$

最后乃有

$$\delta(A_0')=|A_0'|-|\Gamma A_0'|=(|A_0|-1)-|\Gamma A_0|=\delta_0-1.$$

因 $\delta_0'<\delta_0$，这就証明了 $\delta_0'=\delta_0-1$。

3° 由以上結果，可以推出，自 X 去掉若干个頂点，得一 $\delta_0'=0$ 的图，即謂使 X 能在 Y 里配对，δ_0 实即所要去掉的頂点的极小个数；遂得欲証。

推理(寇尼希定理)　在一个偶图里，負荷集頂点个数的极小，等于对集弧的个数的极大。

这个最后結果，将用来建立一个新的法則，以确定极大对集；在图的理論上，这个法則，較之确定极大流的法則更有意义；这个法則实基于戴尔盖沃蜺(d'Ergévary)[2]与柯恩(Kuhn)[5]的研究，一般称之为“匈牙利法則”。

28　匈牙利法則

現在来研究偶图(X, Y, Γ)及其某一对集 W，对集的弧表以

粗綫(別的弧則表以細綫)；假定对集 W 是完备的：每一細弧，至少和一条粗弧相邻。

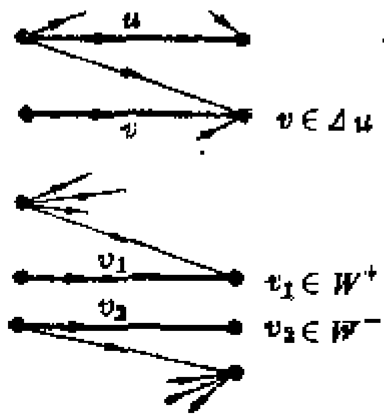


图 10-8

一点 z，若不是粗弧的一个頂点，称为**非飽和的**，若 $w \in W$，用 Δw 表示終点与 w 的起点相邻那些粗弧所成的集合；W^+ 表示終点与一非飽和点相邻的粗弧集合，W^- 表示起点与一非飽和点相邻的粗弧集合。

于是有

定理 5 以下各条件是等价的：

(1) 在偶图 (X, Y, Γ) 里，对集 W 是极大的；

(2) 在偶图 (X, Y, Γ) 里，不存在交錯鏈(細弧与粗弧相互交錯)联接两个相异的非飽和点；

(3) 在图 (W, Δ) 里不存在自 W^+ 里一点走向 W^- 里某一点的路；

(4) 在图 (W, Δ) 里，每一頂点，可記以符号 + 或 −，使 W^+ 的每一点，均記上 +，而 W^- 的每一点均記上 −，且沒有一条弧其方向为自 + 到 −。

茲往証 (1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(1)。

(1)⇒(2)，蓋若存在一条交錯鏈 U_0，連接两个相异的非飽和点，則对集 $W' = (W - U_0) \cup (U_0 - W)$ 将比 W 多一条弧，这和 W 极大相違。

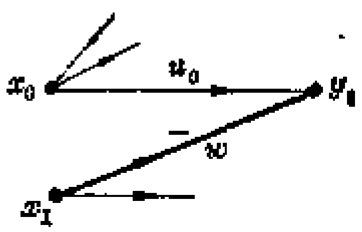
(2)⇒(3)，蓋 (W, Δ) 自 W^+ 走向 W^- 的每一条路，均对应于連接两个非飽和点 $x_0 \in X$ 与 $y_0 \in Y$ 的一个交錯鏈。

(3)⇒(4)。将 $\hat{\Delta} W^+$ 里的点，統記以 +，而将 $W - \hat{\Delta} W^-$ 里的点統記以 −，則 $W^+ \subset \hat{\Delta} W^+$，而 $W^- \subset W - \hat{\Delta} W^+$(因不存在自 W^+ 走向 W^- 的路)，这便驗証了 (4)。

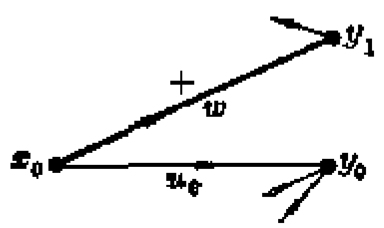
(4)⇒(1)。在具对集 W 的图 (X, Y, Γ) 里，按(4)的做法，将粗弧記以＋或－，記以－的那些粗弧所有起点的集合表以 X^-，記以＋的那些粗弧所有終点的集合表以 Y^+。

若弧 $u_0=(x_0, y_0)$ 满足 $x_0\notin X^-$，$y_0\notin Y^+$，可考察以下四种图形：

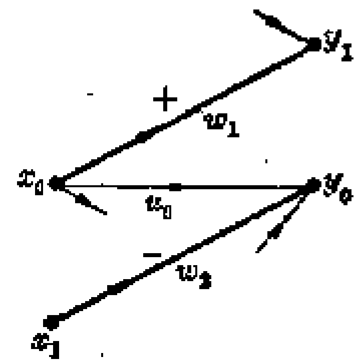
情况 1. x_0 与 y_0 都不飽和：这是矛盾，因对集是完备的。



情况 2. x_0 非飽和：这是矛盾，因 $w\in W^+$ 原已記上＋。



情况 3. y_0 非飽和：这是矛盾，因 $w\in W^-$ 原已記上－。



情况 4. x_0, y_0 都飽和：这是矛盾，蓋在图 (W, Δ) 里沒有弧自 w_1(記以＋)走向 w_2(記以－)。

图 10-4

图 10-4 的四种情况，都出现矛盾，因而不可能存在 $x_0\notin X^-$ 与 $y_0\notin Y^+$ 的弧 (x_0, y_0)，故 $X^-\cup Y^+$ 是一个負荷集。

据寇尼希定理，对于任一对集 W' 与任一負荷集 C'，恒有 $|W'|\leqslant|C'|$，但在此已有 $|W|=|C|$，故对集 W 极大，而負荷集 C 极小。

作极大对集法則　取 X 的每个頂点，继續在 Y 里試行配对，

当已没有任何顶点再能在 Y 里配对时，便得一完备的对集 W.

作图 (W, Δ)，并寻求自 W^+ 走向 W^- 的路（不同的方法，已在第 7 章里指出），若存在一条这样的路，便将对集 W 替以对集 W'，这个对集比原对集多一条弧，然后再重复上面的做法。

若不存在这样的路，W 便已极大。

作极小負荷集法則 按照上面的做法，确定一个极大对集 W.

在图 (X, Y, Γ) 里，将 $\hat{\Delta}W$ 的弧統記以 +，将 $W-\hat{\Delta}W$ 的弧統記以 −；記以 − 的那些粗弧的起点，和記以 + 的那些粗弧的終点，便构成一个极小負荷集 C.

可注意的是，用这种方法，同时也就作出了一个极大內固集（取补集）。

29 无限情况的推广

以上某些結果，可以推广到区域有限的偶图上来。

定理 6 在一个区域有限的偶图 (X, Y, Γ) 里，当且仅当

$$|\Gamma A| \geqslant |A| \quad (A \subset X; |A| < \infty),$$

X 能在 Y 里配对。

使用无限网絡的性质（第 8 章），照寇尼希-霍尔定理那样予以証明。

定理 7 在一个区域有限的偶图 (X, Y, Γ) 里，去掉 X 的某些顶点，以使 X 能在 Y 里配对，其所去顶点个数的极小是

$$\delta_0 = \max_{\substack{A \subset X \\ |A| < \infty}} (|A| - |\Gamma A|).$$

这个定理，可以使用族

$$\mathscr{A} = \{A \mid |A| < \infty;\ \delta(A) = \delta_0\}$$

的交集 A_0 照寇尼希-傲尔定理那样予以証明（但須注意 A_0 是有限

个 $\mathscr{A}$ 的集合的交集)[2]。

定理 8　有限或无限偶图的色級是：

$$m=\max\{|\Gamma x|, |\Gamma^{-1}y| / x\in X, y\in Y\}.$$

若 $m=\infty$，定理显成立；若 $m<\infty$，可完全象有限情况那样予以証明。

最后，提出一个重要的定理，这个定理以各种不同的形式出现于許多不同的問題中，唯在无限图，才值得加以証明。

貝恩斯坦因 (Bernstein) 定理　在一个无限偶图 (X, Y, Γ) 里，若存在一个自 X 到 Y 的对集 W，及一个自 Y 到 X 的对集 W'，則亦必能借助于一个弧集 $W_0\subset W\cup W'$，将 X 在 Y 上配对（一一对应）。

設 σ 为使每一点 $x\in X$ 对应于頂点 $y\in Y$ 而 $(x, y)\in W$ 的单値映象；τ 为使每一点 $y\in Y$ 对应于頂点 $x\in X$ 而 $(x, y)\in W'$ 的单値映象，且取 $A=X-\tau Y$。同时用 $\mathscr{A}=\{A_i/i\in I\}$ 表示滿足下二条件的 X 的子集族：

(1)　　　　$A_i\supset A$

(2)　　　　$\tau(\sigma A_i)\subset A_i$.

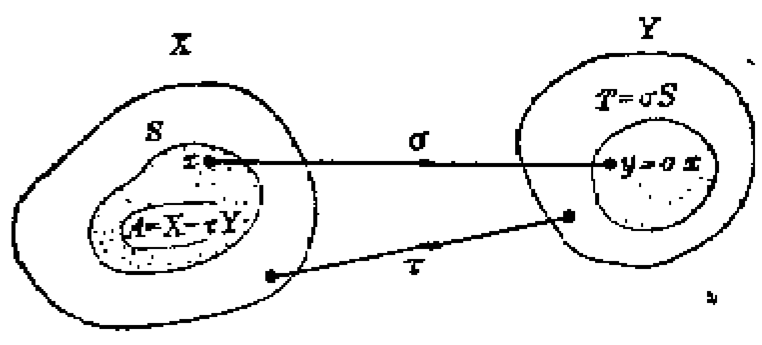


图　10-5

---

(1)　这个論断可以更进一步推广到所有运输网絡上来（貝尔热，Berge [1]）；得：若一个运输网絡的图有限回縮，且 Γ^{-1} 有限，則降低需要，便能全部滿足，所应降低的极小数量是：

$$\delta_0=\sup_{\substack{A\subset\Gamma^{-1}z\\|A|<\infty}}(\bar{d}(A)-F(A)),$$

因 $X\in\mathscr{A}$，族$\mathscr{A}$是非空的；若取 $S=\bigcap_{i\in I}A_i$，则

$$S\supset A,$$

$$\tau(\sigma S)=\tau\sigma\bigcap_{i\in I}A_i\subset\bigcap_{i\in I}\tau\sigma A_i\subset\bigcap_{i\in I}A_i=S.$$

故 $S\in\mathscr{A}$，同样，$A\cup\tau(\sigma S)=S_0$ 也属于 $\mathscr{A}$，盖

$$\begin{cases} S_0\supset A, \\ \tau(\sigma S_0)\subset\tau(\sigma S)\subset A\cup\tau\sigma S=S_0. \end{cases}$$

于是 $S_0\supset S$（因 $S_0\in\mathscr{A}$），但另一方面

$$S_0=A\cup\tau(\sigma S)\subset A\cup S=S,$$

故最后有

$$A\cup\tau(\sigma S)=S.$$

现在来考察满足下列条件的弧 (x, y) 的集合 W_0：

$$y=\sigma x \quad 若 x\in S,$$

$$y=\tau^{-1}x \quad 若 x\notin S.$$

为了証明这就是 X 在 Y 上的一个对集，只须証明，当取 $\sigma S=T$ 时，能有

$$\tau(Y-T)=X-S$$

卽足。

然而这是很明显的，盖可书

$$\tau(Y-T)=\tau Y-A-\tau T=\tau Y-(A\cup\tau\sigma S)$$

$$=\tau Y-S=X-S.$$

遂得欲証。

【例 1】 平面几何 现在来研究一平面曲綫，命 X 与 Y 是其在两个正交軸上的投影。假定对每一 $x\in X$，恒有曲綫的两个点 (x, y_1) 与 (x, y_2)，其投影均为 x，并取 $\Gamma x=\{y_1, y_2\}$；同样，設对每一 $y\in Y$，也有曲綫的两个点，同时投影到 y。

偶图(X, Y, Γ)是区域有限的，且对应于这个图的每一弧，有图10-6那个曲綫的一个点。

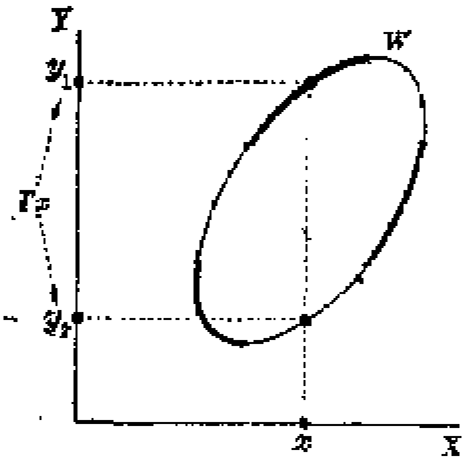


图　10-6

但另一方面，有

$$|\Gamma x| = 2 \quad (x \in X),$$

$$|\Gamma^{-1} y| = 2 \; (y \in Y).$$

由定理6，可将X在Y里，Y在X里配对。故按貝恩斯坦因定理，存在一个对集W，用尽X和Y的頂点；因而存在曲綫的一个部分(在图里用粗綫表出的)，具下述性质：平行于坐标軸的任一直綫，仅和这个部分交于一点。从邏輯观点来看，一个极为美妙的存在定理，也就得到了証明。

30　在矩陣論上的应用

已給方陣

$$P = (p_j^i) = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_2^1 & \cdots & p_j^1 & \cdots & p_n^1 \\ p_1^2 & p_2^2 & \cdots & p_j^2 & \cdots & p_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_1^n & p_2^n & \cdots & p_j^n & \cdots & p_n^n \end{pmatrix},$$

若

$$p_j^i \geqslant 0 \qquad (i \leqslant n,\; j \leqslant n),$$

$$\sum_i p_j^i = 1 \quad (j \leqslant n),$$

$$\sum_j p_j^i = 1 \quad (i \leqslant n),$$

则称这个矩陣是双随机的。这种双随机矩陣，在凸函数的各种推广中起重要作用(見[E. T., F. M.]第8章)；波尔克霍夫(G. Birkhoff)[2]指出这种矩陣的某些主要性质，可自寇尼希-霍尔定理推得。

定理9　在一个n阶方陣(a_j^i)的行列式展开式中，如要所有的项都为零，其充分和必要条件是可以在A里抽出一个$p \times (n-p+1)$ $(p \leqslant n)$維的子矩陣，其所有元素統为零。

事实上，取 $N=\{1, 2, \cdots, n\}$，而对 $i\in N$，取

$$\Gamma i=\{j/a_j^i\neq 0\}.$$

如此，便构成了一个偶图 $(N, \bar{N}, \Gamma)$。

行列式展开式中各項是

$$\pm a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_n^{i_n},$$

要这些項都为零，須不存在集合 N 在 $\bar{N}$ 内的对集；据寇尼希-霍尔定理，其充分和必要条件，是存在一个集合 $I\subset N$，使

$$|I|>|\Gamma I|.$$

由此，便可立即自 A 抽出一个

$$|I|\times(n-|I|+1)$$

維的由零构成的子矩陣。

定理 10 若 $P=(p_j^i)$ 是一个双随机矩陣，則在其行列式展开式中，至少有一項不为零。

事实上，設定理不成立，則据上一定理，矩陣 P 可以分成四个子矩陣 $R=(r_j^i)$，$S=(s_j^i)$，$T=(t_j^i)$ 及零矩陣 O，如图 10-7 所示。遂有

$$\sum_i\sum_j s_j^i=n-p+1.$$

于是

$$\sum_j\sum_j t_j^i=(n-p)-(n-p+1)$$

$$=-1.$$

这和原設 $t_j^i\geq 0$ 相違。

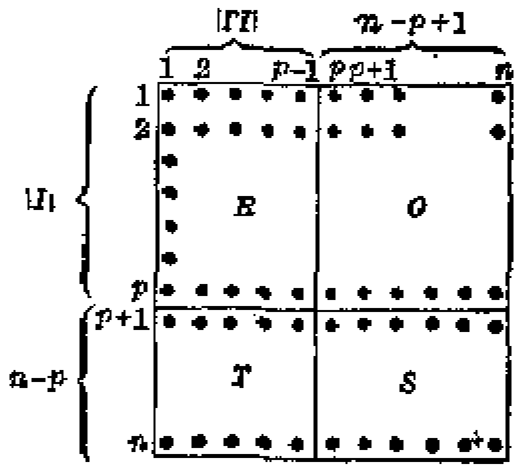


图 10-7

定理 11（波尔克霍夫-馮·諾曼，Birkhoff-Von Neumann） 每一双随机矩陣，都是排列矩陣的一个重心。

欲証这个定理，只須証若 P 是一个双随机矩陣，恒存在若干个排列矩陣 $P_1, P_2, \cdots, P_k$（每行每列恰有一个元素为 1，其他元素

皆为0)，及数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$，满足：

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k \geqslant 0,$$

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=1,$$

$$P=\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2+\cdots+\lambda_k P_k.$$

若矩陣 $P=(a_j^i)$ 的行列式，其項不全为零，譬如有一項 $a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_n^{i_n} \neq 0$，取 $\lambda_1=\min\{a_1^{i_1}, a_2^{i_2}, \cdots, a_n^{i_n}\}$，用 P_1 表示排列 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 的矩陣；最后取

$$P=\lambda_1 P_1+R.$$

矩陣 R 的零元素多于 P；若 R 的行列式各項都为零，便到此为止，否則按同样方法来分解 R；最后可得

$$P=\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2+\cdots+\lambda_k P_k+R,$$

其中 R 的行列式各項均为零。因而 $R=0$ (蓋若不然，将有 $\lambda>0$，使 λR 成为双随机矩陣，而其行列式各項均为零，这和定理10相違)。但另一方面

$$\sum_{i=1}^{n} a_j^i=1=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k.$$

这就恰好証明了所提出的定理。

于此，可注意图論作为論証工具的特殊效能。波尔克霍夫-馮·諾曼定理的直接論証，实較此大为冗长。

第11章 因　子

31 哈密尔頓路与回路

在图 (X, Γ) 里，設路 $\mu=[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 經过图的每一頂点一次且仅一次，便称这条路是**哈密尔頓路**；同样，若回路 $\mu=[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ 經过图的每一頂点一次且仅一次，則称这条回路是**哈密尔頓回路**。

一个已給的图，判断其是否具有哈密尔頓路或回路，常是很重要的。

【例1】 环繞世界的閉合旅途（哈密尔頓 Hamilton） 如在地球上已給20个城市：$a, b, c, \cdots, t$；为了簡单起見，設这些城市是代表地球的十二面体（12个五边形的面，20个頂点）的頂点，現在要求沿十二面体的边，走过每个城市一次且仅一次，最后仍回到原出发点。这个問題归結为寻求图11-1上那个对称图的一条哈密尔頓回路。

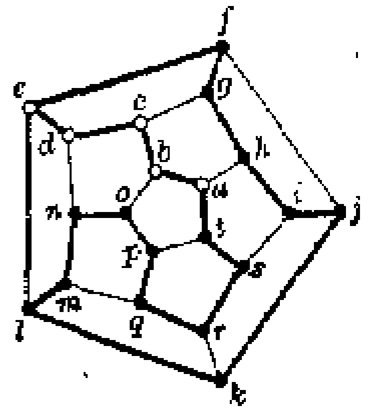


图 11-1

哈密尔頓所使用的方法，极为有名。当一个旅行者，到达一边的一个端点之后，他可有这样的选擇：选取右面的那条边，这样的动作記以 D；选取左面的那条边，这样的动作記以 G；設在某处停止了，这样的动作便記以 1。然后定义这些动作的乘积：DG 是一种动作，先向右走，后向左走；GGD 或 G^2D 是一个动作，向左走两次，然后向右走，等等。两个动作，自同一个起点出发，到达同一終点，則这两个动作称为相等。这样的乘积不可易（例如 $DG \neq GD$），但是可結合的［例如 $(GG)D=G(GD)$］。

按照上面的定义，有下列公式：

$$D^5=G^5=1,$$

$$DG^2D=GDG,$$

$$GD^2G=DGD,$$

$$DG^3D = G^2,$$
$$GD^3G = D^2.$$

遂可写出：

$$1 = D^5 = D^2D^3 = (GD^3G)D^3 = (GD^3)^2 = \cdots$$
$$= [G(GD^3G)D]^2 = (G^2D^3GD)^2 = \cdots$$
$$= [G^2(GD^3G)D\,GD]^2 = [G^3D^3GDGD]^2 = \cdots$$
$$= GGGDDDGDGDGGGDDDGDGD.$$

这个序列，共含 20 个字母，且不能再分出部分序列也等于1：这个序列便代表一条哈密尔顿回路。将这个序列按反向相連，可得另一回路，而一个簡单的理由，指出不再存在其他的回路。

須注意的，旅行者可在标出的回路上，从不同的点开始他的旅行。哈密尔頓固定了行程的前五个城市，譬如取 a, b, c, d, e，保持这种旅行自 DGD 开始，因而得到 4 个解答：

$$DGDGDGGGDDDGDGDGGGDD,$$
$$DGDGGGDDDGDGDGGGDDDG,$$
$$DGDGDDDGGGDGDGDDDGGG,$$
$$DGDDDGGGDGDGDDDGGGDG.$$

【例 2】 环繞世界的非閉合旅途 若在上面的問題里，不再要求回到原起点，則旅途的数目是异常大的：問題归結为寻求图 11-1 上那个图的一切哈密尔頓路。

于此，写出从 D 开始的哈密尔頓路即可，交换 D 与 G，可以推得其他所有的哈密尔頓路。

$DDDGDGDGGGDDDGDGDG$	
$DGDGGGDDDGDGDGGGDD$	$DGDDDGGGDGDDDGGGDG$
$DGGGDDDGDGDGGGDDDG$	$DGDGGDDDGDGGGDDGDG$
$DDDGGGDGDGDDDGGGDG$	
$DGDDDGGGDGDGDDDGGG$	
$DGDGDDDGGGDGDGDDDG$	$DDDGDDGDGDGDGGDGGG$
$DDGDGDGGGDDDGDGDGG$	$DDDGGDGDDDGGGDGDGD$
$DGDGDGGGDDDGDGDGGG$	$DDDGDDGDGDGGGDDDGD$

DGGGDGDGDDDGGGDGDG	
DDGGGDGDGDDDGGGDGD	*DGDGDGGGDDDGDGGDDD*
	DGGGDGDGGDDGDGDDDG
DDDGGGDGDGDGDDGDDD	
DGDDDGGGDGDGDDGDDD	*DDDGDDGDGDGDGGGDDD*
DGDGGGDDGDGGDDDGDG	*DGDGDDDGGGDDGDGGGD*
DGGGDGDDGGGDDDGDGD	
	DDDGGGDGDGDGDDDGGG
DGGGDGDGGDDDGDGGGD	*DGGGDGDDDGGDGDGGGD*
DGGGDGDDDGGGDGDDDG	

(各組序列,对应于相等的动作。)

【例3】 在棋盘上馬的行走路綫(尤拉)　在棋盘上要求走馬,使其行走的路綫,經过每个方格一次且仅一次。这个問題归結为在一个对称图上,找出一条哈密尔頓路。这个問題曾使很多数学家感到兴趣,其中著名的有尤拉,德莫弗(de Moivre),范德尔蒙德(Vandermonde)等。为了解决这个問題,所使用的方法非常多,于此,不能給出所有的解答,現将一种在实踐中似能成立,在理論上尚未能加以論証的規律,陈述于次:每次将馬放在一种位置,使其所控制的尚未使用的方格数最小。

另一种方法,是在半个棋盘上,找出一条封閉的道路,使用对称性质,将其加倍,然后将两条道路凑合起来(图11-2)。这个規律,适应棋盘本身的特性,但不能推广到一般的图上。对这些解感到兴趣的讀者可参看[1],[6]。

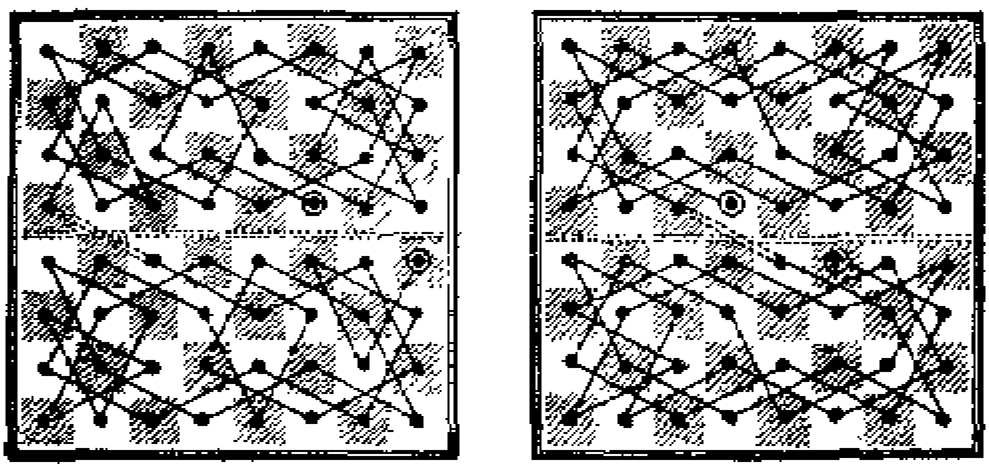


图 11-2

在运筹学里,一条哈密尔頓路的确定,是解决很多安排問題的

錯誤：为了明确起見，譬如欲求完成若干种行动的最优順序，可将这些行动用点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代表，当完成 x_j 之前完成 x_i 毫无损失，便联弧 (x_i, x_j)，欲求的安排，一般便用图上一条哈密尔頓路来表示。

【例 4】 **书籍問題**(約翰逊，S. Johnson)　一个印刷厂厂长計划出版 n 本书籍，总共使用两部机器：一部印刷机，一部装訂机。設印好第 k 本书需要时間 a_k，装訂好这本书需要时間 b_k。一本书的印刷，自然須在装訂之前，因此，装訂机由于等待，可能耗費一个或长或短的时間，問怎样安排，才能使工作尽早完成？

易見将这些书籍按相同的順序送进两部机器，是沒有損失的。一个最优安排，由一个排列 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$，或由一个动作序列 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}$ 来确定。但另一方面，可以証明，在某一个最优安排里，因

$$\min\{a_i, b_j\} \leq \min\{a_j, b_i\},$$

书(i)应置于书(j)之前。

每当这个不等式出現时，便作弧 (x_i, x_j)：在所得到的图上，寻找一条哈密尔頓路，若这条路是唯一的，它便表示所欲求的安排。

定理 1（寇尼希）　若图是完备的（即每一对頂点，至少按一个方向相联接），必存在哈密尔頓路。

設 $\mu=[a_1, a_2, a_3, \cdots, a_p]$ 是一条长为 $p-1$ 的路，其頂点各各不同，再設 x 是一个还未用到的頂点。茲往証可以作出一条形如 $\mu_k=[a_1, a_2, \cdots, a_k, x, a_{k+1}, \cdots, a_p]$ 的路。

事实上，假設这个結論不成立，即設不存在整数 k，在 1 与 p 之間，使

$$(a_k, x) \in U, \quad (x, a_{k+1}) \in U,$$

則对 $1 \leq k \leq p$，将有

$$(a_k, x) \in U \Rightarrow (x, a_{k+1}) \notin U \Rightarrow (a_{k+1}, x) \in U.$$

若路 $\mu_0=[x, a_1, \cdots, a_p]$ 不存在，将有 $(a_1, x) \in U$，因而 $(a_p, x) \in U$，而路 $\mu_p=[a_1, a_2, \cdots, a_p, x]$ 存在。这是矛盾。

这样，即可一步一步地构成一条路，用完图的所有頂点[1]。

根据这个結論，可以推得，总能安排某一竞赛的参加人，使每个人胜过其下一人。

为了在更一般的情况下，确定哈密尔頓路的存在，須引用运輸网絡的理論，論之于下。

32 因子的确定

图(X, Γ)的部分图(X, B)，其每一頂点的外半次与内半次都等于1，則这个部分图称为原图的一个**因子**。一条哈密尔頓回路是一个因子，其逆則不眞，因一个因子可能由很多个不同的回路构成。

定理 2 图(X, Γ)具有因子的必要和充分条件是对每一$S \subset X$，$|S| \leqslant |\Gamma S|$。

事实上，据寇尼希-霍尔定理，这个条件表示，在偶图$(X, \bar{X}, \Gamma)$里可以将X在$\bar{X}$上配对。

推理　若图(X, Γ)的每一頂点x，均具性质$|\Gamma x| = |\Gamma^{-1} x| = m$，則能将图的弧分成$m$个互不相交的集合$W_1, W_2, W_3, \cdots, W_m$，各成一个因子。

事实上，偶图$(X, \bar{X}, \Gamma)$具性质$|\Gamma x| = m$，$|\Gamma^{-1} x| = m$，据寇尼希-霍尔定理的推理，可将X在$\bar{X}$里配对，这就确定了W_1；对于所剩下来的部分图，可按同样理由，将X在$\bar{X}$里配对，这就确定了W_2，等等[2]。

因子的寻求，是一件很容易的事，因为这是一个极大流的問

---

[1] 这个結論，和戴拉克(Dirac)[2]的一个定理非常相似，这个定理是：若(X, Γ)是一个对称連接、且无环的图，再若对每一$x \in X$，有$|\Gamma x| \geqslant \frac{1}{2}|X|$，則恒存在哈密尔頓路。

[2] 从这个推理，特别可以推得在环楼世界旅行問題里，因子的存在。

题；为了确定一条哈密尔顿回路，方法之一是寻求图的所有因子，然后保留只有一条回路的那些因子。以下則試图将一个因子的不同回路加以"接合"。

【例 1】 重新研究在棋盘上馬的行走路綫那个問題，要求找出一条是哈密尔頓回路的路綫。由于棋盘的对称性质，可以直接求得图 11-3 的因子(其中記以 a 的方格构成一条回路，記以 b 的构成另一回路，等等)。由于第一条回路的連續二頂，和第二条回路的連續二頂分别相邻，便可将这两条回路接合起来。因此，回路"a"和"C"可以接合(借助于图上标出的两条虛綫)，回路"a"与"B"也可以接合，等等。不同的可能的接合，由图 11-4 的那个輔助图表示出来，这个輔助图，取 $[a,C]$，$[a,B]$，… 等作为它的边，它很明显地包含一条哈密尔頓路 $aDbCdAcB$，按照这个顺序，連續接合不同的回路，便可驗証，恰得欲求的哈密尔頓回路。

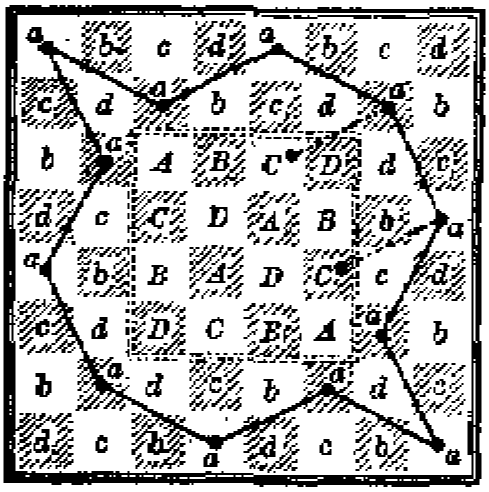


图 11-3

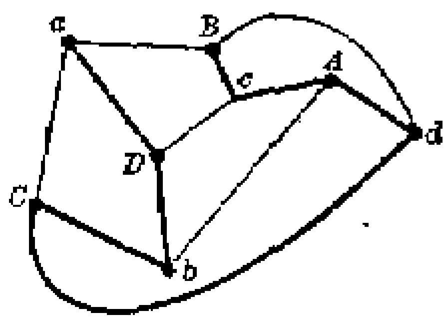


图 11-4

以上这些結果，可用一种奇特的形式加以推广；对于一个已給的图 (X, Γ)，其具备下列性质的初級路或初級回路的总合，称为該图的**分解**：

1° 分解里的任二路沒有公共頂点；

2° 图的每一頂点，均在分解的某一路上。

在分解的所有的路中，要区别出那些是初級回路，这些回路記以 $\alpha^i=[a_0^i, a_1^i, \cdots, a_p^i=a_0^i]$；那些是初級路(长度 $\neq 0$)，这些路記以 $\beta^j=[b_0^j, b_1^j, \cdots, b_q^j]$；那些是形如 $\gamma^k=\{c^k\}$ 的长度为 0 的路。用 A^i 表示回路 α^i 所遇到的頂点集合，用 B^j 表示路 β^j 所遇到的頂点集合，用 C^k 表示集合 $\{c^k\}$。最后，取

$$n(\alpha^i)=0,$$
$$n(\beta^j)=1,$$
$$n(\gamma^k)=1.$$

分解 $\mathscr{A}=(\alpha^1, \alpha^2, \cdots; \beta^1, \beta^2, \cdots; \gamma^1, \gamma^2, \cdots)$ 的值定义为

$$n(\mathscr{A})=\sum_i n(\alpha^i)+\sum_j n(\beta^j)+\sum_k n(\gamma^k).$$

一个因子便是一个值为 0 的分解。现在要求找出一个已知图所有分解的极小值。

定理 3 在图 (X, Γ) 里，分解的极小值等于这个图的欠数，即

$$\delta_0=\max_{S\subset X}(|S|-|\Gamma S|).$$

事实上，考虑一个分解 $\mathscr{A}=(\alpha^1,\alpha^2,\cdots; \beta^1,\beta^2,\cdots; \gamma^1,\gamma^2,\cdots)$，作集合 X 的两个模型 X 与 $\overline{X}$，构造偶图 $(X, \overline{X}, \Gamma)$，其中当且仅当 $x_j\in\Gamma x_i$ 时 $\overline{x}_j\in\Gamma x_i$。

在偶图里，对应于回路 α^i 的是一个对集，具 $|A^i|$ 条弧，对应于路 β^j 的是一个对集，具 $|B^j|-1$ 条弧，聚集所有这些弧，构成一个对集 W，其弧的条数是

$$|W|=\sum_i|A^i|+\sum_j(|B^j|-1).$$

遂有

$$\begin{aligned}n&=\sum_i|A^i|+\sum_j|B^j|+\sum_k|C^k|\\&=\sum_i|A^i|+\sum_j(|B^j|-1)+\lambda(\mathscr{A})\\&=|W|+\lambda(\mathscr{A}).\end{aligned}$$

对集 W 与分解的这种对应是 1−1 的；应用第 10 章定理 4，乃有

$$\min\lambda(\mathscr{A})=n-\max|W|=n-(n-\delta_0)=\delta_0.$$

推理 1 若存在一条哈密尔顿回路，则 $\delta_0=0$。

（显然）

推理 2 若存在一条哈密尔顿路，则 $0\leqslant\delta_0\leqslant1$。

（显然）

推理 3 若图(X, Γ)不包含回路，则其欠数等于互不相交的初級路的最小个数(于此，唯一的一点，看做长度为 0 的一条路)。

（显然）

推理 4 若图不含回路，则存在一条哈密尔頓路的必要和充分条件是$\delta_0=1$.

（显然）

【例 2】 研究图 11-5 的那个图，要求确定一条哈密尔頓路（通过三种不同方法）。

1° 图(X, Γ)是完备的，保証有哈密尔頓路存在(定理 1)；为了确定这条路，可按定理 1 里那个方法来进行：譬如找出路 $eacb$ 之后，便可求得解答 $eadcb$.

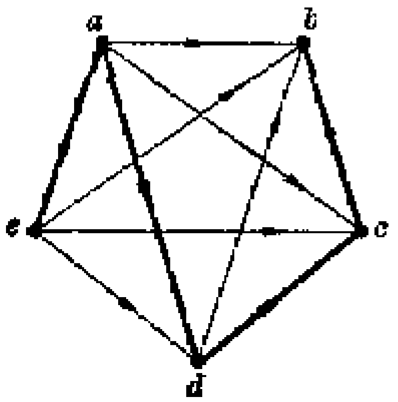


图 11-5

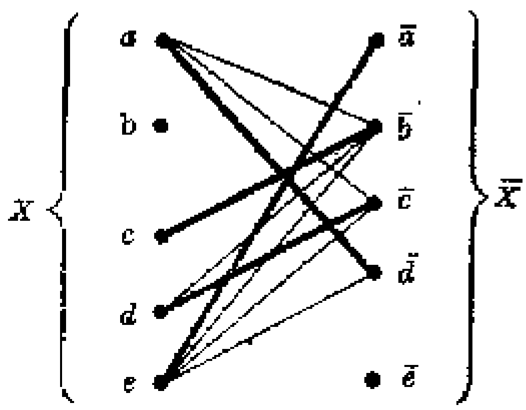


图 11-6

2° 图(X, Γ)显見不含回路（由于点 b 的緣故），而其欠数为

$$\delta_0=\max_{S\subset X}(|S|-|\Gamma S|)=|\{b\}|-|\Gamma b|=1.$$

按推理 4，存在哈密尔頓路，找出图 11-6 的那个图$(X, \bar{X}, \Gamma)$的极大对集，便可得这条路，其解为：$eadcb$.

3° 图(X, Γ)是傳遞的，这就是說

$$z\in\Gamma y,\quad y\in\Gamma x\Rightarrow z\in\Gamma x.$$

因而在一条哈密尔頓路里，連續頂点的外半次逐步下降，各頂的外半次是

$$|\Gamma a|=3,\ |\Gamma b|=0,\ |\Gamma c|=1,\ |\Gamma d|=2,\ |\Gamma e|=4.$$

由是得路 $eadcb$.

33 具已知半次的部分图的确定

因子的确定,其直接推广之一,是下面的問題:已給图(X, Γ),作一部分图,具已知的半次。若 $A\subset X$, $B\subset X$, 用 $m(A, B)$ 表示自 A 到 B 的弧的条数。

定理 4 已給图(X, Γ)及整数 $r(x)$ 与 $s(x)$ (对于 $x\in X$),存在一个部分图(X, Δ),具性质: $|\Delta x|=r(x)$, $|\Delta^{-1}x|=s(x)$ (对于每一$x\in X$),其必要和充分条件是

(1) $$\sum_{x\in X} r(x)=\sum_{x\in X} s(x),$$

(2) $$\sum_{x\in X}\min\{r(x),\ |\Gamma x\cap S|\}\geqslant\sum_{x\in S} s(x)\quad (S\subset X).$$

事实上,条件(2)表示,图 11-7 的运輸网絡存在一个流,飽和收貨弧,即:$F(S)\geqslant d(S)$ 对一切 $S\subset X$ 均成立。

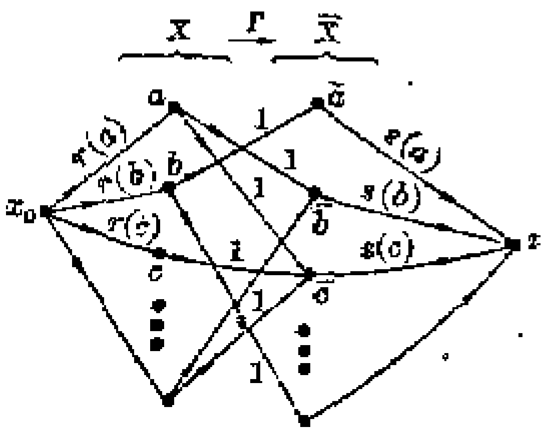


图 11-7

取 $r(x)=s(x)=1$,便得因子的存在条件;若取 $\Gamma x=X$,則得半次定理。

推广 1 考察图(X, Γ)的頂点的两个分划 $(A_1, A_2, \cdots, A_p)$ 与$(B_1, B_2, \cdots, B_q)$,及整数 $r_1, r_2, \cdots, r_p, s_1, s_2, \cdots, s_q$;則存在部分图$(X, \Delta)$,具性质

$$\sum_{x\in A_k}|\Delta x|=r_k,\quad \sum_{x\in B_h}|\Delta^{-1}x|=s_h\quad (k\leqslant p,\ h\leqslant q)$$

的必要和充分条件是

(1) $$\sum_{k=1}^{p} r_k=\sum_{h=1}^{q} s_h,$$

(2) $$m(X-A,\ B)\geqslant\sum_{h\in J} s_h-\sum_{k\in I} r_k$$

$(I\subset\{1, 2, \cdots, p\};\ J\subset\{1, 2, \cdots, q\};\ A\subset\bigcup_{i\in I}A_i;\ B\supset\bigcup_{j\in J}B_j)$.

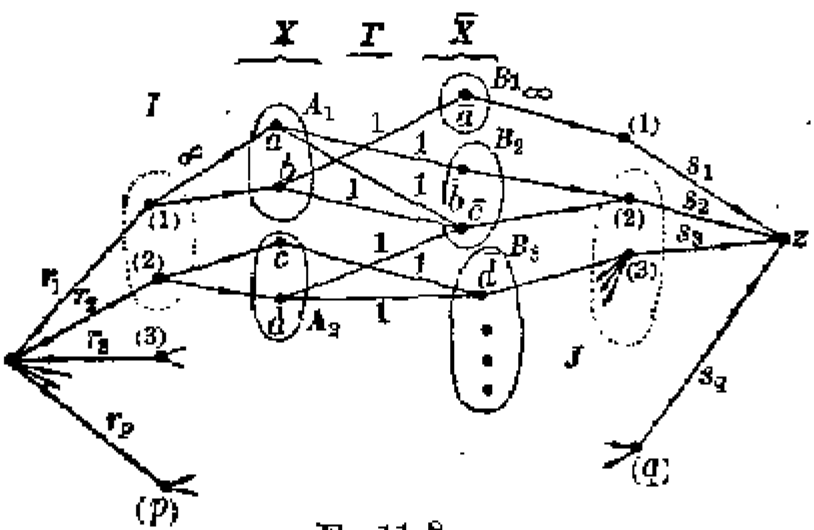


图 11-8

关于图 11-8 的运输网络，若对一切集合 $S=I\cup A\cup B\cup J$，其中 $I\subset\{1, 2, \cdots, p\}$，$J\subset\{1, 2, \cdots, q\}$，$A\subset X$，$B\subset\overline{X}$，有

$$c(U_S^-)\geqslant d(S),$$

则将存在一个流，饱和所有的收货弧。

很明显这个条件就是(2)。

推广 2　对图 (X, Γ) 的每一顶点 x，考察整数 $r(x)$，$r'(x)$，$s(x)$，$s'(x)$，其中 $0\leqslant r(x)\leqslant r'(x)$，$0\leqslant s(x)\leqslant s'(x)$；则存在一个部分图 (X, Δ)，具性质 $r(x)\leqslant|\Delta x|\leqslant r'(x)$，$s(x)\leqslant|\Delta^{-1}x|\leqslant s'(x)$ 的必要和充分条件是

$$(1)\qquad m(X-A, B)+\sum_{a\in A}r'(a)\geqslant\sum_{b\in B}s(b),$$

$$(2)\qquad m(X-A, B)+\sum_{y\notin B}s'(y)\geqslant\sum_{x\notin A}r(x).$$

在图 11-7 的网络上，取集合 $[r(x), r'(x)]$，$[0, 1]$，$[s(x), s'(x)]$ 以替代原有的容量，能研究出在这样的网络上是否存在一个流即足。引用第 8 章定理 2：

$$c(U_S^-)\geqslant b(U_S^+)\quad(S\in\mathscr{A}).$$

取集合 $S=A\cup B$，其中 $A\subset X$，$B\subset\overline{X}$，便得 (1)；取集合 $S=A\cup B\cup\{x_0\}\cup\{z\}$，便得(2)。

第12章 图的中心

34 中　心

設(X, Γ)是一个图(有限或无限);已給二頂x与y,自x到y最短路徑的长度,定义为自x到y的差距$d(x, y)$。

若$x=y$, 取$d(x, x)=0$;若$y\notin\hat{\Gamma}x$, 則取

$$d(x, y)=\infty.$$

定理1 $d(x, y)$满足

(1) $$d(x, x)=0,$$

(2) $$d(x, y)+d(y, z)\geqslant d(x, z).$$

此外,若图是对称的,則

(3) $$d(x, y)=d(y, x).$$

驗証是显然的。若图对称,則函数$d(x, y)$,因其满足(1),(2),(3),便是按拓扑意义的距离。

数

$$e(x)=\max_{y\in X} d(x, y)$$

称为点x的离距。

若离距的极小是一个有限数,具极小离距的点,是G的一个中心,具极大离距的点,是图的周点。一个图可能有許多中心,也可能沒有中心。

【例1】 图12-1的那个图,代表第一个信鴿交通网(1870)。

于此,所謂中心,便是一个城市,它和其他城市的相互交通,决不用更多的来回轉移(故費时最少),巴黎和里昂是两个中心(其离距等于2),蒙諾堡与尼斯則是两个周点(其离距为无穷)。

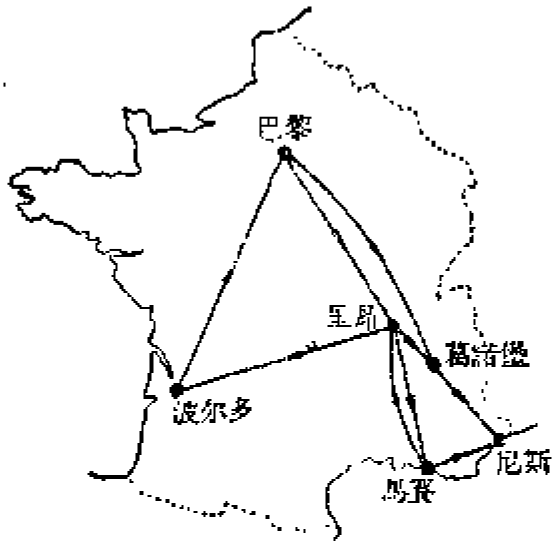


图 12-1

35 离 徑

若一个图有中心 x_0，离距 $e(x_0)$ 称为图的**离徑**；故对于离徑 ρ，有公式

$$\rho=\min_{x\in X} e(x).$$

若图沒有中心，取 $\rho=\infty$。

定理 2 在一个有限图 (X, Γ) 里，若取 $|X|=n$，$\max|\Gamma x|=p$，且若 $1<p<\infty$，则图的离徑 ρ 满足

$$\rho\geqslant\frac{\log(np-n+1)}{\log p}-1.$$

若 $\rho=\infty$，定理显成立；故設 $\rho<\infty$，这表示图有一个中心 x_0。那些頂点，自 x_0 到这些頂点的差距等于 1 的，其个数 $\leqslant p$；那些頂点，自 x_0 到这些点的差距等于 2 的，其个数 $\leqslant p^2$；等等，遂有

$$n\leqslant 1+p+p^2+\cdots+p^\rho=\frac{p^{\rho+1}-1}{p-1},$$

或

$$n(p-1)+1\leqslant p^{\rho+1},$$

或

$$\log(np-n+1)\leqslant(\rho+1)\log p.$$

由此，即可推得公式。

定理 3 若一个有限图 (X, Γ) 是完备的(即每一对顶点总至少按一个方向相联接)，则其离径 $\rho\leqslant 2$；且每一顶点 x_0，其

$$|\Gamma x_0-\{x_0\}|=\max_{x\in X}|\Gamma x-\{x\}|$$

的是一个中心。

若 $\rho=1$，定理显成立。

若 $\rho>1$，考察 $|\Gamma x_0-\{x_0\}|$ 为极大的顶点 x_0(因图 Γ 有界，这样的点一定存在)，既对一切点 x 恒有 $e(x)\geqslant 2$，故若能证 $e(x_0)=2$，则将同时証出 x_0 是一个中心，及

$$\rho=2.$$

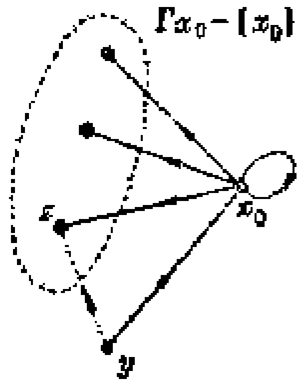


图 12-2

用反証法，設 $e(x_0)>2$：将存在一点 $y\neq x_0$，不能有一条长度为 1 的路自 x_0 通到 y，也不能有一条长度为 2 的路自 x_0 通到 y。因 $y\notin\Gamma x_0$，故

$$x_0\in\Gamma y.$$

再者，若 z 是 $\Gamma x_0-\{x_0\}$ 的一点，必有 $y\notin\Gamma z$(否則将有一条长度为 2 的路自 x_0 通到 y)，遂得 $z\in\Gamma y$，由此乃有

$$z\in\Gamma y-\{y\}.$$

最后，有

$$\Gamma x_0-\{x_0\}\subset\Gamma y-\{y\}.$$

因 $x_0\in\Gamma y-\{y\}$，故有真正的包含关系：

$$\Gamma x_0-\{x_0\}\subset\subset\Gamma y-\{y\}.$$

由此，

$$|\Gamma y-\{y\}|>|\Gamma x_0-\{x_0\}|=\max_{x\in X}|\Gamma x-\{x\}|,$$

遂得矛盾。

推理　若一个有限图 (X, Γ) 是完备的(即謂每一对頂点，至少可以按照一个方向用一条路相联)，則这个图具有中心。

事实上，图 $(X, \hat{\Gamma})$ 是完备的，按定理 3，这个图有中心 x；在图 (X, Γ) 里，可用一条有限长的路，自 x 通到其他頂点。

这个图具离徑 $\rho\leqslant e(x)<\infty$，因而存在中心。

【例 1】 現在来研究某种竞賽，在这个竞賽里規定每个参加人須参加相同次数的比賽；問如何安排比賽程序，使所猜定的优胜者尽可能有代表意义？

用 X 代表竞賽参加人的集合；当参加人 x 对参加人 y，而能击敗 y 时，取 $(x, y)\in U$；于是得一完备图 (X, Γ)，如所画出的那样(图 12-3)。映象 Γ 是非傳递的：x_1 胜 x_3，x_3 胜 x_2，但 x_1 并未胜 x_2；在这样的意义下，这种竞賽是"淘汰制"的，所得答案很坏。一种比較公允，然而却甚粗糙的想法，即当图 (X, Γ) 有中心存在时，建議取这些中心作为优胜者；于此，图是完备的，中心的存在是保証了的(定理 3)，共求得两个优胜者 x_1 与 x_3。这个方法虽甚簡单，但尚待研究的有：优胜者 x_1 曾击敗了另一优胜者 x_3，那么，x_1 不值得独占鰲头嗎？竞賽人 x_3 曾击敗得胜人 x_1，那么，他不值得占据較末位更好的一席嗎？以后将指明如何对这些因素作出解釋(第 14 章)。

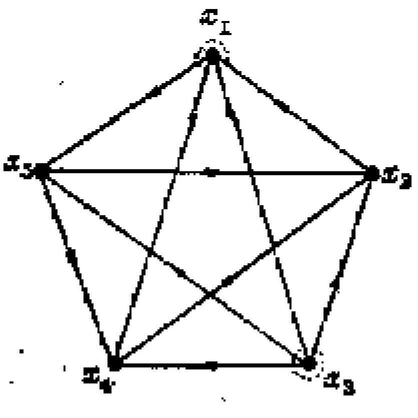


图　12-3

m 次对抗的一种竞賽，确定 (X, Γ) 的一个部分图，恰有 m 条边，若这个图具有中心，即取这些中心，作为竞賽的猜測优胜者。

第13章　严格連接图的直徑

36 在无环严格連接图上的推广

設 $G=(X, U)$ 是一个无环的严格連接图，其 $|X|>1$；在任一点 $x\in X$，有路自此出发，也有路到达这点，故至少存在两个弧經过 x，其一向外，另一向内。一个頂点 x，有两个以上的通过弧的，叫做**結点**，其他頂点則称**非結点**。一条路仅其起点与終点是結点的称为一**枝**。一个无环严格連接仅具一个結点的图叫做**玫瑰图**：这种图具有极其簡單的結构，盖不同的枝均自这个唯一的結点出发再回到这点。

一个严格連接图 G，若去掉任意一条弧，便失去其严格連接性，則称 G 为一**极小連接图**；显見玫瑰图是一个极小連接图。若 $A\subset X$，去掉 A 内每两点間的弧，而将 A 的頂点凑合于其中一点，称这种做法为**收縮**集合 A。由此可得一个 p-图，在一般情况，当 $p\neq 1$，則所得不是一个图。下面的許多結果，主要归功于克雷斯替(Christie)，卢斯(Luce)，馬綏(Macy)[1]。

定理 1　在一个极小連接图 G 里，設 A 是某一頂点集合，构成一个严格連接子图，則 A 的收縮，提供一个极小連接图。

1° 首先証 A 的收縮提供一个 1-图。事实上，在相反的情况，将存在一点 $x\notin A$ 及两点 $a, a'\in A$，使 (x, a)，$(x, a')\in U$[也可能 (a, x)，$(a', x)\in U$，但論証是一样的]。去掉这两条弧中的一条，仍得一严格連接图，因而 G 就不是一个极小連接图了。

---

[1] 見克雷斯替，卢斯，馬綏[2]；这些結果，由于鲁沃 (B. Roy) 的一个定理而臻于完备，我們得見其原稿。这个定理是：一个图 (X, Γ)，当且仅当不存在任何子集 $A\subset\subset X$ (在严格的意义下) 包含其象 ΓA，这个图才是严格連接的。其証联系到运輸网絡的理論(見 Roy, C. R. Acad. Sciences, 卷 247, p. 399, 28, 7, 1958)。

2° 其次証 A 的收縮，提供一个极小連接图。事实上，这个图是严格連接的；去掉其一条弧 u，則所得新图将不严格連接，盖图 $(X, U-\{u\})$ 已不再严格連接。

定理2 設 G 是一个极小連接图，而图 G' 由收縮前图的一条初級回路得来，則其胍数滿足

$$\nu(G)=\nu(G')+1.$$

一条回路是初級的，乃其本身不相穿割；G 极小連接，初級回路 μ_0 的收縮，仅去掉一条回路，因而这种收縮，将使綫性无关回路的极大个数减少 1，图 G 与 G' 都严格連接（定理1），故分别有 $\nu(G)$ 与 $\nu(G')$ 个綫性无关的回路（第4章定理3），由此乃得欲証。

定理3 若 G 是一个极小連接图，則至少有两个顶点是非結点。

$\nu(G)\geqslant 1$，盖由假設 $|X|>1$，至少存在一条回路；若 $\nu(G)=1$，因 G 由一条初級回路所构成，故定理显成立。

若定理对于胍数是 $k-1$ 的为真，茲往証这个定理对于 $\nu(G)=k$ 的图亦真。

考察 G 的一条初級回路 μ；可以假定 μ 是这样的：或者它的收縮提供一个結点，或者 $l(\mu)\geqslant 3$. 这样的一条回路总存在，盖长度为 2 的每一回路，而其收縮又提供一个非結点的，甚易被一条长度 $\geqslant 3$ 的初級回路所代替（經过与 μ 相邻的两个顶点及 μ 的二顶）。

收縮回路 μ，得一极小連接图 G'，其 $\nu(G')=k-1$；按假設 G' 有两个非結点 x_0 与 y_0，其中一点譬如 x_0 将是 μ 的縮影（否則定理便已証明）。在 G 里有 $l(\mu)\geqslant 3$，因此，回路 μ 本身至少包含一个非結点 z_0. 图 G 正好有两个非結点 y_0 与 z_0.

推理[1]　若 G 是一个无环的严格連接图，至少具有一个結点，則将存在一个枝，去掉这个枝的弧与非結点，将不失图的严格連接

性。

事实上，若图只有一个結点，它是一个玫瑰图，我們可以去掉玫瑰图的任一枝，而不失图的严格連接性。

若图有許多結点，可考虑图 $\bar{G}$，其頂点是 G 的結点，其弧是 G 的枝。

$\bar{G}$ 是严格連接的，但因其不含非結点，$\bar{G}$ 不是极小連接的，故能去掉其一条弧而不失严格連接性。遂得欲証。

若 $x, y \in X$，$x \neq y$，自 x 走向 y 长度极小的一条路，定义为自 x 到 y 的軌迹。图既是严格連接的，已給两点之間总存在軌迹。若 u 是从起点 x 开始的一条弧，而自点 x 从弧 u 开始走向点 z 存在一条軌迹，便用 $S(u)$ 記所有这些 z 点的集合；下面的許多定理皆归功于柏拉唐(Bratton)[1]。

【例 1】 考察一个郵路图：X 为城市集合，若投遞員能直接自 x 走向 y，則 $(x, y) \in U$。

对于在 x 的一个郵务員来說，$S(x, y)$ 表示必須經 y 运送的那些信的地址集合。

定理 4 一个軌迹是一条初級路。

按定义，一条自 x 到 y 的路，若不是初級的，至少将經过其某一点两次：因此便能用一条更短的路来代替这条路。

定理 5 若 $\mu = [x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_k]$ 是一軌迹，則 $\mu[x_i, x_j] = [x_i, \cdots, x_j]$ 亦然。

(显然)

定理 6 路 μ 为一軌迹的必要和充分条件是

$$\bigcap_{u \in \mu} S(u) \neq \varnothing.$$

若 μ 是自 x 到 y 的軌迹，$S(u)$ 的交集包含 y，故交集非空。

反之，假定存在一点 y，属于所有这些 $S(u)$，其中 $u \in \mu = [x_1,$

$x_2, \cdots, x_k]$.

若 $d(x_1, y)=p$，则因 $y\in S(x_1, x_2)$，$d(x_2, y)=p-1$；同理，$d(x_3, y)=p-2$，等等。因此，μ 是自 x 到 y 那个軌迹的一段，按定理5，μ 本身也是一个軌迹。

推理 若 μ 是一条回路，有

$$\bigcap_{u\in\mu} S(u)=\varnothing.$$

(显然)

37 直　　徑

設 G 是一个有限的、严格連接的且无环的图；G 里最长軌迹的长度 δ 称为 G 的**直徑**；换言之，即

$$\delta=\max_{x,y} d(x, y).$$

【例1】 在图13-1的那些不同的严格連接图里($n=5$)，已記出弧的条数 m，离徑 ρ，直徑 δ，中心皆繞以圓圈，周点则皆繞以小方形。

可注意的，当 $n=5$，总有 $\delta+m\geqslant 9$，对称的完备图，则是唯一的直徑等于1的图。

图既是有限的，故 $\delta<\infty$. 同样明显的是直徑不超过离徑，即 $\delta\leqslant\rho$[1]. 在一个代表某一机构成員間相互联系的图里，因一件公文，可能要傳递 δ 次，才能到达目的地，图的直徑便起很重要的作用。若允許每一个过手人都能对公文加工，则最方便的便是选擇一种图，使其直徑尽可能地小。此外，为了更經济一些，对弧的个数的极小化一般也感到兴趣。

定理7 在一个无环的严格連接图里，有

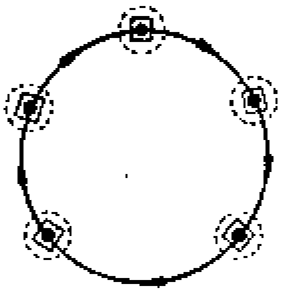
(1) $$n\leqslant m,$$

(2) $$m\leqslant n(n-1),$$

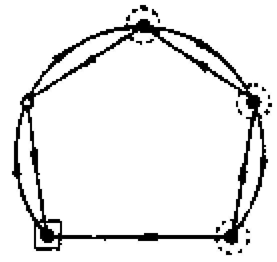
(3) $$\delta\leqslant n-1.$$

---

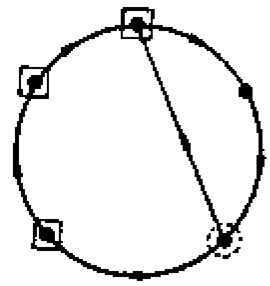
[1] 应作："直徑不小于离徑，即 $\delta\geqslant\rho$". ——譯者注



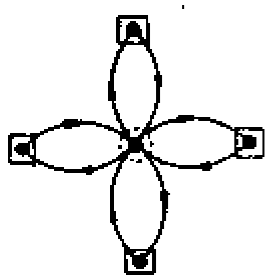
初級回路
$m=5,\ \rho=4,\ \delta=4.$



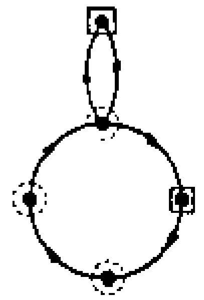
初級圈
$m=9,\ \rho=2,\ \delta=4.$



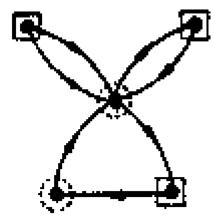
$m=6,\ \rho=2,\ \delta=4.$



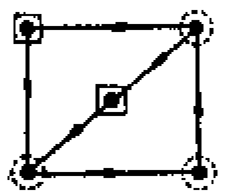
对称的玫瑰图
$m=8,\ \rho=1,\ \delta=2.$



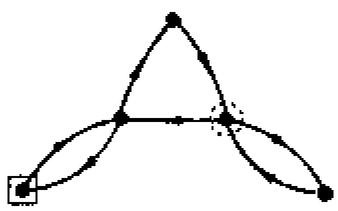
含一个对称枝的玫瑰图
$m=6,\ \rho=3,\ \delta=4.$



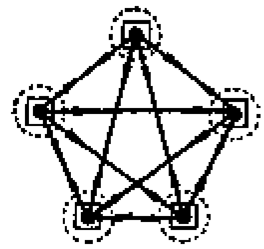
含两个对称枝的玫瑰图
$m=7,\ \rho=2,\ \delta=3.$



$m=6,\ \rho=3,\ \delta=4.$



$m=7,\ \rho=2,\ \delta=4.$



对称的完备图
$m=20,\ \rho=1,\ \delta=1.$

图 13-1

事实上,在每一顶点上,至少可作一条外向过 x 的弧,故有(1)。

m 最大等于在 n 个顶点中每次取两个的排列的个数,故有(2)。最后,最长的軌迹,只能包含 $\delta+1$ 个不同的頂点,故 $n\geqslant\delta+1$,因有(3)。

〔注〕 对于一条初級回路,在(1)与(3)便有等式;对于一个对称的完备

图，(2)也成等式。这就表示，这些不等式每一个单独取出来看，沒有一个能再加以改进。

然与此相反，这个不等式組，則能加以改进：确存在数 n, m, δ 滿足(1)，(2)，(3)，但对已給的这样三个数，却不存在一个严格連接图 $G=(X, U)$，其 $|X|=n$，$|U|=m$，$\delta(G)=\delta$。这种不可能性的产生，往往由于数 δ 选的太小[1]。

因此，比較方便的是对具 n 个頂点 m 条弧而无环的严格連接图，确定其直徑的下限 $f(m, n)$，且用下不等式补充上面的不等式組：

(4)　　$$\delta \geq f(m, n).$$

虽然这样的数 $f(m, n)$ 不能具体确定，但可以充分逼近，这便是建立下定理的目的。

定理 B　設 q 为 $n-1$ 被 $\nu=m-n+1$ 除的商，r 为其余数。取

$$\delta(m, n)\begin{cases}=2q & \text{若 } r=0,\\ =2q+1 & \text{若 } r=1,\\ =2q+2 & \text{若 } r\geq 2.\end{cases}$$

若 G 是一个玫瑰图，則 n, m, δ 滿足前一定理的不等式(1)与(2)，并滿足另一不等式：

(3′)　　$$1<\delta(m, n)\leq\delta\leq 2n-m.$$

反之，若 m, n, δ 是滿足(1)，(2)，(3′)的数，則存在玫瑰图 $G=(X, U)$，其 $|X|=n$，$|U|=m$，$\delta(G)=\delta$。

一个具 n 个頂点 m 条弧的玫瑰图恰有 $\nu=m-n+1$ 个枝，且可将一个枝上的一个非結点轉移到另一枝上，而不改变弧的条数，欲証这个定理，只須注意到上面这个事实即足。在每一枝上設有一个非結点，而在最后一枝，設有 $n-\nu$ 个非結点，便得极大直徑：

---

[1] 作为例，卢斯(Luce)[2]指出，若 $n, m, \delta>1$ 滿足(1)，(2)，(3)，且若

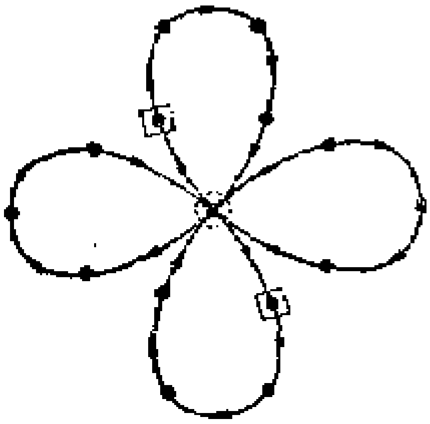
(4)　　$$\delta\geq 2n-m,$$

則存在带环的严格連接图 G，其 $|X|=n$，$|U|=m$，$\delta(G)=\delta$。不幸的是，确存在很多图，对于这些图，(4)不成立(例如图 12-2 与 3 的那两个图)。

$$\delta_0=n-\nu+1=n-(m-n+1)+1=2n-m.$$

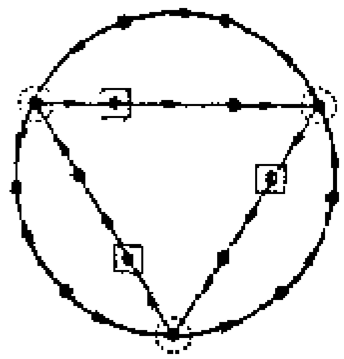
欲求极小直徑 δ_1，可将 $n-1$ 个非結点尽可能平均分配到 ν 个枝上，由此，$\delta_1=\delta(m, n)$。

推論　柏拉唐(Bratton)的猜想　若 m 与 n 是固定的，要求确定一个图，严格連接，无环，具 m 条弧 n 个頂点，而使其直徑尽可能地小。柏拉唐[1]已証明很少有图，其直徑小于 $\delta(m, n)$ 的。可是这样的图确存在：象图 13-3 的那个图，它和图 13-2 的玫瑰图，有相同的頂数和弧数，然其直徑却小一个单位。



$n=15$, $m=18$, $\delta=8$, $\rho=4$.

图　13-2



$n=15$, $m=18$, $\delta=7$, $\rho=5$.

图　13-3

象图 13-3 的图那样的一些图，都是这样的图，其每一枝都是两个結点間的軌迹，具同样的长度，而其长度是一个 $\geqslant 3$ 的奇数。可以証明[1]，这种情况对于直徑 $\delta(m, n)-1$ 总成立，且可証明，这些是仅有的具下列性质的严格連接图：

1° 有一个直徑 $<\delta(m, n)$，

2° 每一枝是一个軌迹，

3° 对于每一对結点，恰存在一个枝，自一个結点走向另一結点。

这些結果，似乎可以肯定下面犹待推敲的猜想：所有具 m 条弧 n 个頂的无环严格連接图，統有一个直徑，大于或等于 $\delta(m,n)-1$。

第 14 章　图的联系矩阵

38　矩阵运算的引用

为了更一般起见，本章研究 p-图 $G=(X, U)$，其顶点是 x_1, x_2, $\cdots$, x_n. 用 a_i^j 表示 U 里自 x_i 到 x_j 的弧的个数，n 行 n 列的方阵 (a_i^j) 称为 p-图 G 的**联系矩阵**；元素 a_i^j 按通常的规定位于第 i 行与第 j 列的交点上。$\boldsymbol{a}^i=(a_1^i, a_2^i, \cdots, a_n^i)$ 表示第 i 个行向量，$\boldsymbol{a}_j=(a_j^1, a_j^2, \cdots, a_j^n)$ 表示第 j 个列向量。

【例 1】 若 G 是一个图，则其联系矩阵 $A=(a_i^j)$ 的元素是 0 或 1，图 14-1 的图，可构造它的联系矩阵如次：

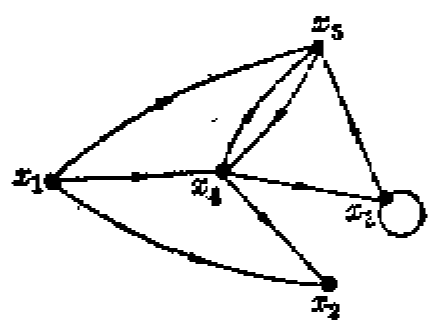


图　14-1

$$
\begin{array}{c}
j=1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5 \\
A=\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\begin{array}{l} i=1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\end{array}
$$

可注意者，在矩阵 A 里，主对角綫上元素 a_3^3 等于 1，这表示在顶点 x_3 上有一个环。

設 $A=(a_i^j)$ 是一个联系 p-图的矩阵。其轉置矩阵 $A^*=(a_j^{*i})$ 乃自 A 按主对角綫对称得来：这是联系一个 p-图的矩阵，这个 p-图，由改变原图每一条弧的方向得来。

补矩阵 $A'=(a_j^{\prime i})$ 由 $a_j^{\prime i}=p-a_i^j$ 来定义；在图 (X, Γ)，补矩阵的获得，乃将矩阵 A 的元素 0 統代以 1，而元素 1 統代以 0，这是联系图 (X, Γ') 的矩阵，其 Γ' 由下式定义：

$$\Gamma' x = X - \Gamma x \quad (x \in X).$$

定理 1 设 G 是一个图，A 是其联系矩阵，当且仅当图 G 是对称的，矩阵 A 才对称（$A = A^*$ 或 $a_j^i = a_i^j$）。当且仅当图 G 反对称，矩阵 A 才反对称（$A \leqslant (A')^*$，或 $a_j^i + a_i^j \leqslant 1$）。当且仅当图 G 是完备的，矩阵 A 才完备（$A \geqslant (A')^*$，或 $a_j^i + a_i^j \geqslant 1$）。

（显然）

定理 2 研究两个多重图 $G = (X, U)$ 与 $H = (X, V)$，具相同的顶点集合，并设二者的联系矩阵分别是 $A = (a_j^i)$ 与 $B = (b_j^i)$。矩阵 $A + B$ 对应于 U 与 V 的弧的合集所构成的多重图；矩阵 AB 对应于按下法形成的多重图：自顶点 x 到顶点 y，用一条 U 的弧接一条 V 的弧，能作出多少条不同的路，便自 x 到 y 作出同样多的弧。

1° 在图 $(X, U \cup V)$ 里，自 x_i 走向 x_j 的弧的个数是

$$a_j^i + b_j^i,$$

这正是矩阵 $A + B$ 的一般元素。

2° 形如 $[x_i, x_k, x_j]$ 且

$$(x_i, x_k) \in U, \qquad (x_k, x_j) \in V$$

的不同的路的个数等于 $a_k^i b_j^k$，故自 x_i 走向 x_j，由一条 U 的弧接一条 V 的弧所构成的路的总数是

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^i b_j^k = (\boldsymbol{a}^i, \boldsymbol{b}_j),$$

于此，$(\boldsymbol{a}^i, \boldsymbol{b}_j)$ 表示行向量 $\boldsymbol{a}^i$ 与列向量 $\boldsymbol{b}_j$ 的数量积：这正是矩阵 AB 的一般元素。

推理 1 若 G 是一个 p-图，A 是其联系矩阵，则矩阵 $P = A^{\lambda}$（矩阵 A 本身的 λ 次乘积）的元素 p_j^i，等于自 x_i 走向 x_j 长度为 λ 的不同的路的个数。

对于 $\lambda = 1$，定理显成立；若对于值 $\lambda - 1$，定理已証明，則对于

值 λ，定理仍能成立，盖按前一定理，$A^{\lambda}=A(A^{\lambda-1})$ 表示自頂点 x_i 走向頂点 x_j 长度为 $1+(\lambda-1)=\lambda$ 的路的个数。

推理2 在一个图 G 里，当且仅当 $A^{\lambda}\neq 0$ 时，始存在长 λ 的路；当且仅当自某一秩起 $A^{\lambda}=0$ 时，始不存在回路。

（据推理1，可以立即推出这个推理。）

这些結果，允許将 p-图上的某些問題，轉化为矩陣問題，現在就来研究几个这样的問題。

39 数 数 問 題

当一个图满足某些已知条件的路是可数的，则用联系矩陣来描写图时，其实际效用是很明显的。首先考察下面的問題：

問題1 在一个完备且反对称的图 (X, U) 里，确定长度为3的回路的个数。

【例1】 六种不同的食物，按下列方式，让一条狗来試食：每一天在狗的面前放两碟不同的食物，看狗首先吃完的是那一碟，在試完 $C_6^2=15$ 种可能之后，构造图 (X, U)，其中 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_6\}$ 由六种食物所构成，而 $(x_i, x_j)\in U$ 表示食物 x_i 优越于食物 x_j。这个图是完备的，如图14-2，而其联系矩陣由 A 表示。

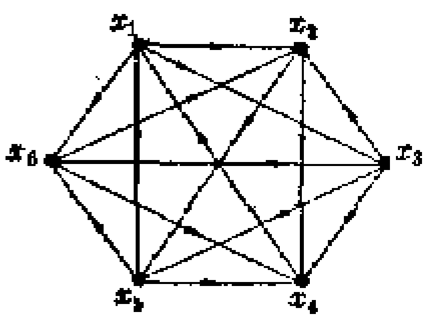


图 14-2

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&0&1&1\\0&0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1&1\\1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&1\\0&1&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

現在再来开始試驗，但放在狗的面前的是三碟不同的食物，而不是两碟；若这些食物是 x_3, x_5, x_4，则可以預言，狗所喜爱的将是 x_3，但若这些食物是 x_1, x_2, x_4，这些点是一条回路的頂点，则由于先前那个試驗，狗无定見的緣

故，便不能作出预言。若 ξ 是图 (X, U) 的长度为 3 的回路的个数，又若 $g(n)$ 是在 n 阶完备反对称图里，长度为 3 的回路的极大个数，取比值 $\xi/g(n)$ 作为狗的无定見系数。

易証

$$g(n)=\begin{cases}\dfrac{n^3-n}{24} & \text{若 } n \text{ 是奇数,}\\[2ex] \dfrac{n^3-4n}{24} & \text{若 } n \text{ 是偶数。}\end{cases}$$

于此，求得

$$g(6)=\frac{1}{24}6(6^2-4)=8.$$

于是须要确定数 ξ，也就是說须要解决关于图 (X, U) 的問題 1。

定理 3　設 G 是一个完备的反对称图，$A=(a_i^j)$ 是其联系矩陣；若 $r_i=\sum\limits_j a_i^j$ 表示第 i 行各元素之和，則长度为 3 的回路的个数是

$$\xi=\frac{1}{12}n(n-1)(2n-1)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(r_i)^2.$$

事实上，长度为 3 的圈的个数是

$$C_n^3=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2).$$

当且仅当过同一顶点的两条弧都自該点向外，长度为 3 的圈，才不是一条回路；因此长度为 3 而又不是回路的圈的总数恰是

$$\sum_{i=1}^{n}C_{r_i}^2=\sum_i\frac{1}{2}r_i(r_i-1)=\frac{1}{2}\sum_i(r_i)^2-\frac{1}{2}\sum_i r_i.$$

可是

$$\sum_{i=1}^{n}r_i=|U|=C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1).$$

因此，

$$\xi=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)-\frac{1}{2}\sum_i(r_i)^2+\frac{1}{4}n(n-1)$$

$$=\frac{1}{2}n(n-1)\left[\frac{n-2}{3}+\frac{1}{2}\right]-\frac{1}{2}\sum_i(r_i)^2,$$

遂得所述公式。

【例 2】 再来看前例，其

$$r_1=4,\quad r_2=2,\quad r_3=4,\quad r_4=1,\quad r_5=2,\quad r_6=2.$$

故

$$t=\frac{1}{12}6\cdot5\cdot11-\frac{1}{2}(16+4+16+1+4+4)=\frac{1}{2}(55-45)=5.$$

诸回路实为

$$[x_1,x_2,x_4,x_1];\quad [x_1,x_3,x_4,x_1],\quad [x_1,x_5,x_4,x_1],$$
$$[x_1,x_6,x_4,x_1],\quad [x_2,x_3,x_6,x_2].$$

問題 2 考慮图 G 及三个整数 α,β,γ；路 $\mu=[y_0,y_1,\cdots,y_m]$，若在其上有两个相同的頂点 y_i 与 $y_j(i<j)$，其 $l(\mu[y_0,y_i])=\alpha$，$l(\mu[y_i,y_j])=\beta$，$l(\mu[y_j,y_m])=\gamma$，則謂路 μ 滿足 3-塔 $\alpha\beta\gamma$。試确定滿足 3-塔 $\alpha\beta\gamma$ 的路的个数。

易見前問題是 $\alpha=0$, $\beta=3$, $\gamma=0$ 的一种特殊情况。若 M 是一个矩陣，用 $d(M)$ 表示另一矩陣，其主对角綫是 M 的主对角綫，其他元素統为零。于是有

定理 4 对于一个联系矩陣为 A 的图 G，設 s_i^j 为自 x_i 走向 y_j 且滿足 3-塔 $\alpha\beta\gamma$ 的路的个数，則矩陣 $S=(s_i^j)$ 由乘积

$$S=A^{\alpha}d(A^{\beta})A^{\gamma}$$

来确定。

事实上，长度为 β 的回路的个数，由对角矩陣 $d(A^{\beta})$ 确定（定理 2），故滿足 $0\beta\gamma$ 的路的个数，由矩陣 $d(A^{\beta})\cdot A^{\gamma}$ 确定，因而滿足 $\alpha\beta\gamma$ 的路的个数，由矩陣 $A^{\alpha}\cdot d(A^{\beta})\cdot A^{\gamma}$ 确定。

若 k 不是一个太大的整数，便可利用这一結果，来数出在一个已給的图里，长度为 k 的初級路的个数：只須分別考察一切可能的 3-塔 $\alpha\beta\gamma$ 即足（見[1]，[4]，[7]）。

【例 3】 *在一个联系矩陣为 A 的图里，数出所有长度为 4 的非初級路。*

须要进行考察的不同的3-塔是：031，130，022，220，121，对应的矩陣是：$d(A^3)\cdot A$，$Ad(A^3)$，$d(A^2)A^2$，$A^2d(A^2)$，$Ad(A^2)A$．某些长度为4的路，可能同时满足两个3-塔，为了数出这些路，象阿达瑪(Hadamard)那样，用矩陣$A\times B=(a^i_j\times b^i_j)$表示两个矩陣$A=(a^i_j)$与$B=(b^i_j)$的初級乘积，遂有下表：

路	3-塔	自x_i到x_j路的个数	矩　陣
$[c, x, b, c, b]$	031, 220	$\sum_k a^i_k a^k_j (a^j_i a^i_j)$	$(A\times A^*)\times A^2$
$[c, b, x, c, b]$	130, 031	$\sum_k (a^i_j) a^j_k a^k_i$	$A\times (A^2)^*$
$[c, b, c, x, b]$	130, 022	$\sum_k (a^i_j a^j_i) a^i_k a^k_j$	$(A\times A^*)\times A^2$
$[x, c, b, c, b]$	121, 220	$\sum_k a^i_k (a^k_j a^j_k)$	$A(A\times A^*)$
$[c, b, c, b, x]$	022, 121	$\sum_k (a^i_k a^k_i) a^i_j$	$(A\times A^*)A$

在一个无环的图里，将前面那些矩陣相加，减去表里的矩陣，便得长度为4的非初級路的个数。

40 优胜問題

另一种情况，联系矩陣起重要作用的，为X表示人的集合，而$(x, y)\in U$表示成員x优越于成員y．

所謂x优越于y，乃指这个詞的广泛意义而言：x可能是在一种竞賽里击敗竞賽人y的竞賽者；也可能是一个国会議員，在一次选举中，較之議員y更有得票的可能；也可能是某一文化社团的成員，較之另一成員y，得到更大的尊敬。这里所提出的問題，是要来确定一个优胜者x_0，即謂要确定这样一个人，他是某一竞赛的得奖者，或是国会的議长，或是所指的那个社团的代表人物。

【例 1】 研究图14-3的那个图，其頂点代表某一社团的成員，其自x走向y的弧，表示x对y有充分的影响；这样的图，已在社会学里，在"社会表解"这一名詞之下予以研究(見莫雷諾(Moreno)[6])。

在这样的問題里，經常把最有影响的成員，作为优胜者；在图14-3的图里，因y可以指揮五个成員，他便是一个最有直接影响的人，但这五个人本身，却不是有影响的成員。成員z最有权力：他虽仅直接控制三个成員，但这

三个人本身，则都有很大影响。由此可見所要研究的問題的复杂性。

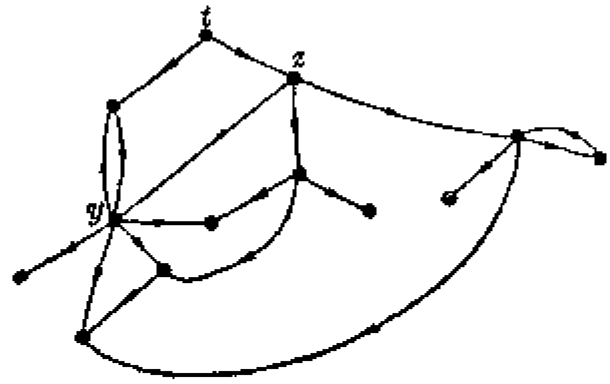


图 14-3

在第12章里，曾考虑将图的中心取作优胜者，这是一个肯定有权力的人，然在很多情况，这个概念显极粗糙；因此必須衡量每个成員的权力 $\pi(x)$，纵中心不存在，情况还是一样的。当函数 $\pi(x)$ 清晰定义之后，便可取权力 $\pi(x_0)$ 极大的那个成員 x_0 作为优胜者。

为了固定思維，現在来研究五个人 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 之間的象棋比賽，若 x_i 胜 x_j，自 x_i 到 x_j 作两条弧，若 x_i 与 x_j 賽成和局，则作一条弧自 x_i 走向 x_j，另作一条弧自 x_j 走向 x_i。最后，在每一顶点作一环。若竞賽是完备的，便得一个2-图 G 和一个联系矩陣 A（图 14-4）。

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2&2&1\\2&1&1&0&0\\0&1&1&2&2\\0&2&0&1&1\\1&2&0&1&1\end{bmatrix}$$

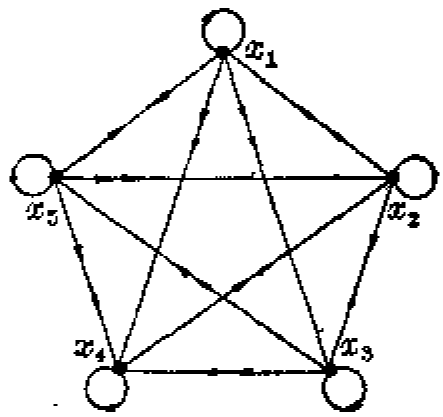


图 14-4

矩陣 A 的元素满足 $a_j^i+a_i^j=2$，且矩陣 A 可以写成一个反对称矩陣 B 及一个元素全为1的矩陣 E 之和。

用 $p_j^i(k)$ 表示矩陣 A^k 的一般元素，即自 x_i 走向 x_j 长度为 k 的路的个数，并取

$$p^i(k)=p_1^i(k)+p_2^i(k)+\cdots+p_5^i(k).$$

数 $p^i(k)$ 称为比賽人 x_i 的 k 阶积累权力；现在来校核这个概念。

1 阶积累权力由 A 的行元素相加得来，这些是

$$p^1(1)=1+0+2+2+1=6,$$
$$p^2(1)=2+1+1+0+0=4,$$
$$p^3(1)=0+1+1+2+2=6,$$
$$p^4(1)=0+2+0+1+1=4,$$
$$p^5(1)=1+2+0+1+1=5.$$

自权力 $p^i(1)$ 推得两个优胜者 x_1 与 x_3，他們是最有权威的成員[在一个沒有和局的竞賽里，由第 12 章定理 3，便可用这种方式，求得图的所有中心]。

每个比賽人的 2 阶权力，可将和他打成平局的那些人的記录，加上被他打败的那些人的記录乘以 2 以求得之；于此，求得

$$p^1(2)=6+0+(2\times6)+(2\times4)+5=31,$$
$$p^2(2)=(2\times6)+4+6+0+0=22,$$
$$p^3(2)=0+4+6+(2\times4)+(2\times5)=28,$$
$$p^4(2)=0+(2\times4)+0+4+5=17,$$
$$p^5(2)=6+(2\times4)+0+4+5=23.$$

这一次，比賽人 x_1 独占鰲头，这由于他比 x_3 击败了更强有力的比賽人。

重复計算：

$$p^1(3)=31+0+(2\times28)+(2\times17)+23=144,$$
$$p^2(3)=(2\times31)+22+28+0+0=112,$$
$$p^3(3)=0+22+28+(2\times17)+(2\times23)=130,$$
$$p^4(3)=0+(2\times22)+0+17+23=84,$$
$$p^5(3)=31+(2\times22)+0+17+23=115.$$

等級的划分，和上面一样：x_1, x_3, x_5, x_2, x_4；这种情况似已稳定，将計算任意重复若干次，实际可見这种情况将无改变。

因此，乃考虑将

$$\pi_k^i = \frac{p^i(k)}{p^1(k)+p^2(k)+\cdots+p^n(k)}$$

当 $k\to\infty$ 时的极限，定义为比賽人 x_i 的权力。

据佩朗-福露貝尼烏斯 (Péron-Frobenius) 定理，这样的极限总存在；且尤可喜者，这个极限极易計算，盖向量 $\pi_k=(\pi_k^1, \pi_k^2, \cdots, \pi_k^n)$ 趋近于矩陣 A 的一个特征向量[1]。

41　布尔运算的引用

在非負实数（$\geqslant 0$）集合里，定义两种运算，称为**广义和**与**广义积**。

广义和使任二数 λ_1 与 λ_2 恒对应于一个数 $\lambda\geqslant 0$，記作 $\lambda=\lambda_1\dot{+}\lambda_2$，广义积使 λ_1 与 λ_2 对应于 $\lambda'\geqslant 0$，記作 $\lambda'=\lambda_1\times\lambda_2$。

現在考虑两个矩陣 $A=(a_j^i)$ 与 $B=(b_j^i)$，其元素全为整数$\geqslant 0$；二者的广义和为矩陣 $S=A\dot{+}B=(s_j^i)$，其中 $s_j^i=a_j^i\dot{+}b_j^i$，二者的广义积是一个矩陣 $P=A\cdot B=(p_j^i)$，其中

---

[1] 这个注，是魏君(Wei)的工作，可叙述如次：

研究联系一个 p-图（在每一頂点有一个环）的矩陣 A，作行列式

$$\mathrm{Det}(A-\lambda I)=f(\lambda).$$

1° 特征方程 $f(\lambda)=0$ 具极大絕对值的根，是一个单根；設 λ_1 是这个单根，而 $t_1=(t_1^1, t_1^2, \cdots, t_1^n)$ 是满足下二式的向量

$$At_1=\lambda_1 t_1, \quad \sum_{i=1}^{n} t_1^i=1.$$

2° 向量 π_k 当 k 趋于无穷时趋于 t_1.

1° 定理的第一部分，就是佩朗-福露貝尼烏斯定理，在随机过程論中，是众所周知的。

2° 作一个适当的坐标变换，将矩陣 A 化成对角形式，第二部分便可立即枧得。

$$p_j^i = (a_1^i \times b_j^1) \dot{+} (a_2^i \times b_j^2) \dot{+} \cdots \dot{+} (a_n^i \times b_j^n).$$

在矩陣上这样定义的"广义"运算，恰和通常的运算一样。象寻常的加法和乘法一样，假定运算 $\dot{+}$ 与 $\times$ 满足以下运算规律：

$$(1)\qquad \begin{cases} \lambda_1 \dot{+} \lambda_2 = \lambda_2 \dot{+} \lambda_1, \\ \lambda_1 \dot{+} (\lambda_2 \dot{+} \lambda_3) = (\lambda_1 \dot{+} \lambda_2) \dot{+} \lambda_3, \\ \lambda_1 \times \lambda_2 = \lambda_2 \times \lambda_1, \\ \lambda_1 \times (\lambda_2 \times \lambda_3) = (\lambda_1 \times \lambda_2) \times \lambda_3, \\ \alpha \times (\lambda_1 \dot{+} \lambda_2) = (\alpha \times \lambda_1) \dot{+} (\alpha \times \lambda_2). \end{cases}$$

(换言之，使用这两种运算，得一"可易环"。)

关于这种广义的矩陣运算，文献极为丰富；現在只提出对我們感兴趣的問題中有直接应用的某些性质。

【例 1】 在一个网絡 G 里，每一条弧 u，均给定一个长度 $l(u)$，研究矩陣 $A=(a_j^i)$，其中

$$a_j^i \begin{cases} = l(x_i, x_j) & \text{若}(x_i, x_j) \in U, \\ = \infty & \text{若}(x_i, x_j) \notin U. \end{cases}$$

取

$$\lambda_1 \dot{+} \lambda_2 = \min\{\lambda_1, \lambda_2\},$$

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2.$$

这两种运算确满足規律組(1)；且 $A \cdot A = A^2$ 取

$$p_j^i = \min_k (a_k^i + a_j^k)$$

作为其一般元素。

这个数代表自 x_i 走向 x_j 具两条或一条弧(因 $a_i^i + a_j^i = a_j^i$)的最短路徑的长度。

一般，A^α 表示从一个頂点走向另一頂点至多具 α 条弧的最短路徑的长度。存在一个数 α_0，使

$$A^{\alpha_0} = A^{\alpha_0+1} = A^{\alpha_0+2} = \cdots.$$

矩陣 A^{α_0} 表示自一个頂点走向另一頂点的最短距离。

定理 5 **按广义运算 $\dot{+}$ 与 $\times$，矩陣满足以下运算规律：**

(1) $$A\dot{+}B=B\dot{+}A,$$

(2) $$A\dot{+}(B\dot{+}C)=(A\dot{+}B)\dot{+}C,$$

(3) $$A\cdot(B\dot{+}C)=(A\cdot B)\dot{+}(A\cdot C),$$

(4) $$(A\dot{+}B)^*=B^*\dot{+}A^*,$$

(5) $$(A\cdot B)^*=B^*\cdot A^*,$$

(1)，(2)与(4)是很显然的。为了驗証(3)，只须将矩陣 $A\cdot(B\dot{+}C)$ 的元素写出即足：

$$\langle \boldsymbol{a}^i, \boldsymbol{b}_j\dot{+}\boldsymbol{c}_j\rangle=[a_1^i\times(b_j^1\dot{+}c_j^1)]\dot{+}\cdots$$
$$=[(a_1^i\times b_j^1)\dot{+}(a_1^i\times c_j^1)]\dot{+}\cdots$$
$$=\langle \boldsymbol{a}^i, \boldsymbol{b}_j\rangle\dot{+}\langle \boldsymbol{a}^i, \boldsymbol{c}_j\rangle.$$

为了驗証(5)，只須注意到 $(A\cdot B)^*=P^*$ 的元素 p_j^{*i} 满足下式即足：

$$p_j^{*i}=p_i^j=\langle \boldsymbol{a}^j, \boldsymbol{b}_i\rangle=\langle \boldsymbol{a}_j^*, \boldsymbol{b}^{*i}\rangle=\langle \boldsymbol{b}^{*i}, \boldsymbol{a}_j^*\rangle.$$

应注意在一般情况 $A\cdot B\neq B\cdot A$。

当所考虑的矩陣是一个图的联系矩陣时，其所有元素均为0或1，此时用

$$1\dot{+}1=1 \qquad 1\times1=1$$
$$1\dot{+}0=1 \qquad 1\times0=0$$
$$0\dot{+}0=0 \qquad 0\times0=0$$

来定义运算 $\dot{+}$ 与 $\times$。

换言之，即取

$$\lambda_1\dot{+}\lambda_2=\max\{\lambda_1, \lambda_2\},$$
$$\lambda_1\times\lambda_2=\min\{\lambda_1, \lambda_2\}.$$

运算 $\dot{+}$ 与 $\times$ 分别称为**布尔加法**与**布尔乘法**。

定理 6 若二图 $G=(X, \Gamma)$ 与 $H=(X, \Delta)$ 有联系矩陣 A 与 B，按一般习惯，取

$$(\Gamma\cup\Delta)x=\Gamma x\cup\Delta x,$$

$$(\Delta\cdot\Gamma)x=\Delta(\Gamma x),$$

則布尔和 $A\dot{+}B$ 对应于图 $(X, \Gamma\cup\Delta)$，布尔积 $A\cdot B$ 对应于图 $(X, \Delta\cdot\Gamma)$。

这个結論和定理 2 相似；乘积 $P=A\cdot B$ 的元素 p_j^i 是

$$p_j^i=(a_1^i\times b_j^1)\dot{+}(a_2^i\times b_j^2)\dot{+}\cdots.$$

故若存在一条形如 $[x_i, x_k, x_j]$ 的路，其 $x_k\in\Gamma x_i$，$x_j\in\Delta x_k$，則 $a_k^i\times b_j^k=1$，因而 $p_j^i=1$；在相反的情况，則 $p_j^i=0$。因此，当且仅当 $x_j\in\Delta(\Gamma x_i)$，始有 $p_j^i=1$，即需存在一条自 x_i 走向 x_j 的鏈由 G 的一条弧后跟 H 的一条弧所构成。

推理 設 G 是联系矩陣为 A 的图；布尔积 $A^\alpha=A\cdot A\cdot\cdots\cdot A$ 对应于一个图具弧 (x, y) 的必要和充分条件，是在 G 里存在一条长度为 α 自 x 走向 y 的路（α-势的图）。

（显然）

布尔矩陣代数，它的发展，和一般的矩陣代数的发展是平行的，可用以解决图的某些問題，例如：已知 α-势的图，往求原图。

这和确定一个矩陣的 α 次根那个問題相似。

第15章 投射矩陣

42 全单模矩陣

用 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 記一个图 G 的弧，用 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 記其頂点，并取

$$s_j^i=\begin{cases}+1 & \text{若 } x_i \text{ 是 } u_j \text{ 的起点，}\\ -1 & \text{若 } x_i \text{ 是 } u_j \text{ 的終点，}\\ 0 & \text{若 } x_i \text{ 不是 } u_j \text{ 的端点。}\end{cases}$$

矩陣 $S=(s_j^i)$ 称为**关于图的弧的投射矩陣**。

若 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ 表示图的边，而取

$$\boldsymbol{r}_j^i=\begin{cases}+1 & \text{若 } x_i \text{ 是 } \boldsymbol{u}_j \text{ 的一个端点，}\\ 0 & \text{在相反的情况。}\end{cases}$$

矩陣 $R=(r_j^i)$ 定义为**关于图的边的投射矩陣**。

矩陣 $A=(a_j^i)$，若所有自 A 抽出的方子矩陣，其行列式均等于 0, +1, 或 −1, 則这个矩陣称为**全单模的**。

一个全单模矩陣，其元素 a_j^i 或等于 0，或等于 +1，或等于 −1，盖这些元素均是一阶方子矩陣的行列式；因此，需要一种判断，来識别一个由元素 0, +1 或 −1 构成的矩陣是否为全单模的。

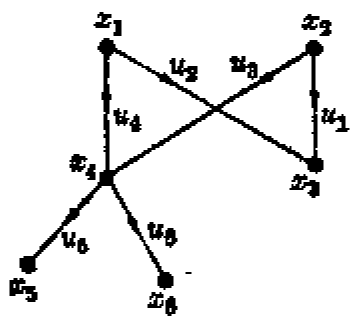


图 15-1

图 15-1 的那个图，取 S 作为关于弧的投射矩陣，关于边的投射矩陣，則可自 S 将 −1 換成 +1 得到。

所有这些矩陣，都是全单模的，这一事实，可以直接驗証，也可以引用下面的定理，加以証明。

$$
\begin{array}{rl}
 & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{matrix} \\
S= & \begin{bmatrix} 0 & +1 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{matrix}
\end{array}
$$

定理 1（赫勒尔-湯姆金斯-盖尔，Heller-Tompkins-Gale）設 A 是一个元素为 0, +1 或 −1 的矩陣，每一列最多包含两个非零元素，則 A 为全单模的必要和充分条件是其行可以分成两个互不相交的集合 I_1 与 I_2，具下二特性：

(1) 若同一列的两个非零元素，有相同的符号，則一个在 I_1 內，一个在 I_2 內。

(2) 若同一列的两个非零元素有相反的符号，則二者同在 I_1 內或同在 I_2 內。

1° 設矩陣 A 的行，能象定理所讲的那样加以划分，則自 A 抽出的每一方子矩陣 B，也具有这个特性，欲証 A 是全单模的，能証 $\text{Det}(B)=0$, +1 或 −1 卽足。

这个論断对一阶的矩陣 B 为眞；設論断对 $q-1$ 阶的矩陣已予証实，現在来由此推出論断对 q 阶的方陣 B 必也眞实，B 的两个互不相交的集合仍为 I_1 与 I_2.

設每一列向量 b_j 恰有两个非零元素，則

$$
\sum_{i\in I_1} b^i=\sum_{i\in I_2} b^i.
$$

行向量綫性相关，故有 $\text{Det}(B)=0$.

若某一列向量不包含非零元素，同样有 $\text{Det}(B)=0$.

最后，若存在一个列向量 b_j，恰有一个非零元素，設为 $b_j^i=+1$，令 C 表示自 B 去掉第 j 列与第 i 行所得的方陣，則因假

設定理对 $q-1$ 阶的矩陣为真，故

$$\mathrm{Det}(B)=\pm\mathrm{Det}(C)=+1,\ -1\ 或\ 0.$$

在所有情况，論断均已驗証。

2° 設 A 是一个全单模矩陣，其每一列最多包含两个非零元素，兹往証存在一个分划 (I_1, I_2) 如定理所云。可以假定 A 的每一列恰含两个非零元素，盖若某一列只含一个非零元素，則去掉这列，并不影响定理的成立。对应于矩陣 A 按下法作一个图（无向的）：对应于第 i 行作顶点 x_i，对应于第 j 列作边 $\boldsymbol{u}_j$；当 $a_j^k\neq 0$ 与 $a_j^h\neq 0$，这条边便是联接顶点 x_k 与 x_h 的。最后，若列向量 $\boldsymbol{a}_j$ 的两个非零元素同号，称边 $\boldsymbol{u}_j$ 是特殊的。现在来証明图的每个初級圈都包含偶数个特殊边。

事实上，若存在一个初級圈，不具有这样的性质，設这个圈是 $\mu=[x_1, x_2, \cdots, x_k, x_1]=(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_k)$，展开相应的方子矩陣的行列式：

$$B=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_k \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccc} \alpha_1 & 0 & \cdots & \beta_k \\ \beta_1 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_k \end{array}\right| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_k \end{array} \end{array}.$$

于此，$\alpha_j\neq 0$，$\beta_j\neq 0$；对应于非特殊边的指标 j 則有 $\alpha_j=-\beta_j$，其个数是 $k-(2p+1)$。

若用 $\varepsilon(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 表示做得排列 $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 的对换的个数，便可写：

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}(B)&=(-1)^{\varepsilon(1,2,\cdots,k)}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k+(-1)^{\varepsilon(2,\cdots,k,1)}\beta_2\cdots\beta_k\beta_1\\&=(+1)\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k+(-1)^{k-1}[(-1)^{k-(2p+1)}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k]\\&=2\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k=\pm 2.\end{aligned}$$

因矩陣是全单模的，遂得矛盾。

每个初級圈既都包含偶数个特殊边，故图的一切圈都如此。若用合并頂点的办法，收縮所有非特殊边，便得一个新图，沒有奇数长度的圈，按寇尼希定理（第4章），这个图是二色的；若用 I_1 表示所有染藍的頂点的下标，而用 I_2 表示所有染紅的，互不相交集合 I_1 与 I_2 恰好满足定理的要求。

推理 1 在一个图里，关于弧的投射矩陣 $S=(s_j^i)$ 是全单模的。

事实上，列向量 $\boldsymbol{s}_j$ 包含一个元素 $+1$，一个元素 -1，其他都为 0，故可取

$$I_1=\{1, 2, \cdots, n\}; \quad I_2=\varnothing.$$

推理 2 关于边的投射矩陣 $R=(r_j^i)$ 全单模的必要和充分条件为这个图是二色的。

事实上，R 的所有非零元素都等于 $+1$，R 全单模的必要和充分条件是图的頂点可以分成两个互不相交的内固集：

$$\{x_i/i\in I_1\} \text{ 与 } \{x_i/i\in I_2\}.$$

定理 2（赫勒尔） 設 A 是元素为 0，$+1$ 与 -1 的一个矩陣；对于两个行向量 $\boldsymbol{a}^i$ 与 $\boldsymbol{a}^j$，当 $\boldsymbol{a}^j$ 的每个非零元素 a_k^j 都相应地等于 $\boldsymbol{a}^i$ 在同一列上的元素 a_k^i，便取 $\boldsymbol{a}^i\succ\boldsymbol{a}^j$；則当

(1) $a_k^i=a_k^j\neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{a}^i\succ\boldsymbol{a}^j$ 或 $\boldsymbol{a}^j\succ\boldsymbol{a}^i$，

(2) $a_k^i=-a_k^j\neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{a}^i\succ-\boldsymbol{a}^j$ 或 $\boldsymbol{a}^j\succ-\boldsymbol{a}^i$，

矩陣 A 是全单模的。

易知关系 $\succ$ 是一个序关系；例如：

$$(0, -1, -1, 0, +1, +1, -1)\succ(0, -1, 0, 0, 0, 0, +1).$$

自 A 抽出的每一方子矩陣 B 也都有特性(1)与(2)，茲往証其行列式 $\mathrm{Det}(B)$ 等于 0，-1 或 $+1$。

論断对于 1 阶的矩陣 B 为眞；設論断对于 $q-1$ 阶的矩陣为眞，往証对于 q 阶矩陣 B，論断亦眞。

若 B 有一个列向量，其元素全为零，則恰有 $\mathrm{Det}(B)=0$；若 B

有一个列向量，仅具一个非零元素，則 $\mathrm{Det}(B)$ 等于（符号除外）这个元素的子行列式，故 $\mathrm{Det}(B)$ 等于 0，+1 或 −1．所剩下来的唯一情况，須加以檢查的，是每一列向量至少含有两个非零元素。

設 b_1^1 与 b_1^2 是列向量 $\boldsymbol{b}_1$ 的两个非零元素；为了固定思維，假定 $b_1^1=+1$，$b_1^2=+1$．按(1)，有 $\boldsymbol{b}^1\succ\boldsymbol{b}^2$ 或 $\boldsymbol{b}^2\succ\boldsymbol{b}^1$．若不計行的順序的改变，可假定 $\boldsymbol{b}^1\succ\boldsymbol{b}^2$；在矩陣 B 里，按 $\boldsymbol{b}^i\pm\boldsymbol{b}^2=\bar{\boldsymbol{b}}^i$ 来改变所有具性质 $\boldsymbol{b}^i\succ\pm\boldsymbol{b}^2$ 的行向量 $\boldsymbol{b}^i$；新矩陣 $\bar{B}$ 的所有元素仍都等于 0 或 1，且 $\mathrm{Det}(\bar{B})=\mathrm{Det}(B)$．首先来証明 $\bar{B}$ 滿足(1)与(2)。

事实上，行向量 $\bar{\boldsymbol{b}}^i$ 可能是沒有变动的一行，如此，記之以 $\boldsymbol{b}^i$，若已变动，則記之以 $\boldsymbol{c}^i$。

譬如設 $c_k^1=\bar{b}_k^i=+1$，往証

$$\boldsymbol{c}^1\succ\bar{\boldsymbol{b}}^i \text{ 或 } \bar{\boldsymbol{b}}^i\succ\boldsymbol{c}^1.$$

因 $b_k^2=0$，乃有

$$b_k^1=c_k^1=+1=\bar{b}_k^i=b_k^i,$$

故 $\boldsymbol{b}^i\succ\boldsymbol{b}^1$ 或 $\boldsymbol{b}^1\succ\boldsymbol{b}^i$．但

$$\boldsymbol{b}^i\succ\boldsymbol{b}^1\Rightarrow\boldsymbol{b}^i\succ\boldsymbol{b}^1\succ\boldsymbol{b}^2\Rightarrow\bar{\boldsymbol{b}}^i=\boldsymbol{b}^i-\boldsymbol{b}^2\succ\boldsymbol{b}^1-\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{c}^1.$$

在另一面，若 $\boldsymbol{b}^1\succ\boldsymbol{b}^i$，便不可能有 $\boldsymbol{b}^i\succ-\boldsymbol{b}^2$（因由此有 $\boldsymbol{b}^1\succ-\boldsymbol{b}^2$，这是矛盾）；也不可能有 $\boldsymbol{b}^2\succ\pm\boldsymbol{b}^i$（因 $b_k^i=1$，$b_k^2=0$）；现在便剩下两种情况須予考慮：或者 $\boldsymbol{b}^i\succ\boldsymbol{b}^2$，或者 $\boldsymbol{b}^i$ 与 $\boldsymbol{b}^2$ 的非零元素，分別在两組互不相重的列上。于是

$$\boldsymbol{b}^1\succ\boldsymbol{b}^i\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{b}^1\succ\boldsymbol{b}^i\succ\boldsymbol{b}^2\Rightarrow\boldsymbol{c}^1=\boldsymbol{b}^1-\boldsymbol{b}^2\succ\boldsymbol{b}^i-\boldsymbol{b}^2=\bar{\boldsymbol{b}}^i\\ \text{(第一种情况)，}\\ \text{或：}\\ \boldsymbol{b}^1\succ\boldsymbol{b}^i=\bar{\boldsymbol{b}}^i\Rightarrow\boldsymbol{c}^1=\boldsymbol{b}^1-\boldsymbol{b}^2\succ\boldsymbol{b}^i=\bar{\boldsymbol{b}}^i\\ \text{(第二种情况)。}\end{cases}$$

在一切情况，(1)已得証；(2)可用同样方法予以証明。

对于其他的行向量，重复变换 $B\to\bar{B}$，在矩陣 $\bar{B}$ 里，便相应地

增加了 0 的个数，一直到 $\bar{B}$ 某一列向量最多只含一个非零元素为止。因原設定理对于 $q-1$ 阶的矩陣已真，故有

$$\mathrm{Det}(B)=\mathrm{Det}(\bar{B})=0,\ +1\ 或\ -1. \qquad 証毕$$

定理 3 設 A 与 B 是仅含元素 0 与 $+1$ 的两个矩陣，且满足前一定理的(1)，則 A 的行向量与 B 的行向量联合构成的矩陣 C 是全单模的。

事实上，考察 C 的一个方子矩陣 $\bar{C}$，$\bar{C}$ 乃由 A 的一个子矩陣 $\bar{A}$ 与 B 的一个子矩陣 $\bar{B}$ 所构成，兹往証 $\mathrm{Det}(\bar{C})=0,\ +1$ 或 -1。象在定理 2 一样，减少矩陣 $\bar{A}$ 的非零元素的个数（且同样减少 $\bar{B}$ 的非零元素的个数），一直到 $\bar{A}$（以及 $\bar{B}$）的每一列向量最多只含一个非零元素；矩陣 $\bar{C}$ 在每一列里便最多只含两个非零元素（等于 $+1$），其中一个在 $\bar{A}$ 里，一个在 $\bar{B}$ 里，故按定理 1，$\bar{C}$ 是一个全单模矩陣，而 $\mathrm{Det}(\bar{C})=0,\ +1$ 或 -1。

【例 1】 直接应用本节的結果，讀者試驗証下列矩陣都是全单模的：

$$A=\begin{bmatrix}-1 & +1 & 0 & 0\\ 0 & +1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & +1 & -1\\ +1 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1 & +1 & 0 & +1\\ -1 & 0 & 0 & +1\\ +1 & -1 & +1 & -1\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}+1 & 0 & +1\\ +1 & +1 & +1\\ 0 & +1 & +1\end{bmatrix}.$$

43 全 单 模 組

現在来研究綫性齐次方程組：

$$(1)\qquad \begin{cases} a_1^1x^1+a_2^1x^2+\cdots+a_m^1x^m=0,\\ a_1^2x^1+a_2^2x^2+\cdots+a_m^2x^m=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_1^nx^1+a_2^nx^2+\cdots+a_m^nx^m=0,\end{cases}$$

若取 $\boldsymbol{x}=(x^1, x^2, \cdots, x^m)$, $\boldsymbol{0}=(0, 0, \cdots, 0)$, $A=(a_j^i)$, 則方程組也可以写为 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 兹往研究当矩陣 A 全单模时满足方程組的向量 $\boldsymbol{x}$.

按照大家所熟知的解法，考察矩陣 A 里所能取出的最大非零行列式，譬如

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{n-p}^1 \\ a_1^2 & & \cdots & \\ \vdots & & & \\ a_1^{n-p} & a_2^{n-p} & \cdots & a_{n-p}^{n-p} \end{vmatrix} \neq 0.$$

首先解基础組：

(1′)

$$\begin{cases} a_1^1x^1+a_2^1x^2+\cdots+a_{n-p}^1x^{n-p}=-(a_{n-p+1}^1x^{n-p+1}+\cdots+a_m^1x^m), \\ a_1^2x^1+a_2^2x^2+\cdots+a_{n-p}^2x^{n-p}=-(a_{n-p+1}^2x^{n-p+1}+\cdots+a_m^2x^m), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^{n-p}x^1+a_2^{n-p}x^2+\cdots+a_{n-p}^{n-p}x^{n-p}=-(a_{n-p+1}^{n-p}x^{n-p+1}+\cdots+a_m^{n-p}x^m). \end{cases}$$

給非基础变量 $x^{n-p+1}, x^{n-p+2}, \cdots, x^m$ 以值 $1, 0, \cdots, 0$; (1′)便具体确定一个向量 $\mathbf{c}_1=(c_1^1, c_1^2, \cdots, c_1^m)$, 其第 i 个坐标 $(i\leqslant n-p)$ 由下式确定：

$$c_1^i=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_{i-1}^1 & -a_{n-p+1}^1 & a_{i+1}^1 & \cdots & a_{n-p}^1 \\ a_1^2 & \cdots & a_{i-1}^2 & -a_{n-p+1}^2 & a_{i+1}^2 & \cdots & a_{n-p}^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-p} & \cdots & & -a_{n-p+1}^{n-p} & & \cdots & a_{n-p}^{n-p} \end{vmatrix}=0, +1 \text{ 或 } -1.$$

向量 $\mathbf{c}_1$, 其坐标全等于 0, +1 或 −1; 它是(1′)的解，故也是(1)的解(因方程組是齐次的)。由此便引出下面的結論：

定理 4[(1)]　若 $A=(a_j^i)$ 是一个全单模矩陣，則方程 $A\boldsymbol{x}=0$ 取

(1) 霍夫曼与克鲁斯卡尔 (Hoffman et Kruskal) [3] 已指出这个定理用在綫性規划里的另一种形式：設 A 是一个具整数元素的矩陣，且設 $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}', \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}'$ 均为具整数坐标的向量，若矩陣 A 全单模，則凸多面体

$$\{x/\boldsymbol{b}\leqslant Ax\leqslant \boldsymbol{b}';\ \boldsymbol{a}\leqslant x\leqslant \boldsymbol{a}'\}$$

的每一面，均有一个具整数坐标的点。(特别因多面体的所有頂点，都是零維的面，故这些頂点都是具整数坐标的点。)

$m-n+p$ 維綫性流型里的向量作为它的解，这个綫性流型由向量 $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \cdots, \mathbf{c}_{m-n+p}$ 等所构成，所有这些向量的坐标都等于 0, +1 或 −1.

事实上，继續給定 $(x^{n-p+1}, x^{n-p+2}, \cdots, x^n)$ 以值 $\mathbf{e}_1=(1, 0, \cdots, 0)$, $\mathbf{e}_2=(0, 1, 0, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $\mathbf{e}_{m-n+p}=(0, 0, 0, \cdots, 1)$，按以上所言，便确定了向量 $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \cdots, \mathbf{c}_{m-n+p}$，其坐标統为 0, +1 或 −1。这些向量綫性无关，盖

$$\lambda_1\mathbf{e}_1+\lambda_2\mathbf{e}_2+\cdots+\lambda_{m-n+p}\mathbf{e}_{m-n+p}=0 \Rightarrow \lambda_1=\cdots=\lambda_{m-n+p}=0.$$

这組向量的个数，恰等于方程組 $Ax=0$ 解空間的維数，向量 $\mathbf{c}_k$ 等正好构成解的一个基底。

在第 4 章里已見对应于一个反对称图的圈 μ，总可借助于下面的方式，作一 m 維向量 $(c^1, c^2, \cdots, c^m)$：沿圈 μ 走一遍，若順某一弧 u_j 的方向走 r 次，逆这个弧的方向走 s 次，卽取 $c^j=r-s$。同时又知綫性无关的圈的极大个数是 $\nu(G)=m-n+p$，其中 m 是弧数，n 是頂数，p 是分图的个数(第 4 章定理 2)。

定理 5 (龐加萊-魏波倫-亚历山大, Poincaré-Veblen-Alexander)　設 G 是一个反对称图，$S=(s_j^i)$ 是关于弧的投射矩陣，則向量 $\mathbf{c}=(c^1, c^2, \cdots, c^m)$ 代表一个圈或若干个圈的和的必要和充分条件是 $S\mathbf{c}=0$.

1° 条件是必要的　于此只須証明对应于一个初級圈的向量 $\mathbf{c}$，满足 $S\mathbf{c}=0$ 卽足。設

$$\mu=[x_1, x_2, \cdots, x_k, x_1]$$

是一个初級圈，$\mathbf{c}=(c^1, c^2, \cdots, c^m)$ 是其相应向量，往証

(1)　$s_1^ic^1+s_2^ic^2+\cdots+s_m^ic^m=0 \quad (i=1, 2, \cdots, n)$.

若圈 μ 不过图的第 i 个頂点 x_i，則这个圈不使用过 x_i 的一切弧 u_j，故对所有下标 j 其 $s_j^i\neq0$ 的，有 $c^j=0$，遂得(1)。

若圈 μ 过頂点 x_i，則这个圈恰用到过 x_i 的两条弧 u_j 与 u_k；关

于这些弧的方向，有如图 15-2 所代表的那三种可能情况。在第一

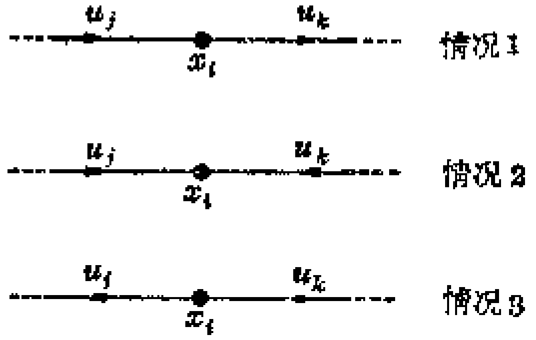


图　15-2

种情况，有

$$c^j = c^k \neq 0;\quad s_j^i = -s_k^i \neq 0.$$

由此 $s_j^i c^j + s_k^i c^k = 0$，遂有(1)。

在第二或第三种情况，有

$$c^j = -c^k \neq 0;\quad s_j^i = s_k^i \neq 0.$$

由此 $s_j^i c^j + s_k^i c^k = 0$，故也有(1)。

在一切情况下，已証 (1) 均成立。

2° 条件是充分的　每一向量 $\mathbf{c}$ 满足 $S\mathbf{c} = 0$ 的，均为在定理 4 里所定义的那些向量 $\mathbf{c}_1$，$\mathbf{c}_2$，…，$\mathbf{c}_{m-n+p}$ 的綫性組合，故能証这些向量都代表圈即足。

因其坐标統为 0，+1 或 −1，向量 $\mathbf{c}_1$ 对应于一个簡单的鏈 μ（或对应于互不相遇的簡单鏈之和），使用同一条弧不超过两次。因 $s_j^i c_1^j$ 只能等于 0，+1 或 −1，又因 $\sum_j s_j^i c_1^j = 0$，故对偶数个指标 j，有 $|s_j^i c_1^j| = 1$；換言之，即鏈 μ 使用了过图的頂点 x_i 的偶数个弧 u_j。因此，若自任一頂点出发，沿鏈 μ 行进，可以保証，迟早总会回到这点：于是 μ 是一个圈（或互不相交的圈的和）。定理得証。

这个定理給出一个寻求图的独立圈的解析方法；但在下一章，我們将得到一个更为簡单的几何确定方法。

44　腑 数 矩 陣

設 $\mathbf{c}_1 = (c_1^1, c_1^2, \cdots, c_1^m)$，…，$\mathbf{c}_\nu = (c_\nu^1, c_\nu^2, \cdots, c_\nu^m)$ 是图 G 的圈的一个基底，現在来研究矩陣

$$C = \begin{bmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \cdots & c_\nu^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \cdots & c_\nu^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1^m & c_2^m & \cdots & c_\nu^m \end{bmatrix}.$$

一个这样的矩阵，称为图 G 的關数矩陣。設列向量 $\mathbf{c}_k$ 都是象在定理 4 里那样挑选的，則矩陣 C 的所有元素都等于 0, -1 或 $+1$, 且具下形：

$$C=\begin{bmatrix} c_1^1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_\nu^1 \\ \vdots & & & & & \\ c_1^{m} & & \cdots & \cdots & \cdots & c_\nu^{m-\nu} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

矩陣 C 乘以矩陣 S 的积，是一个 0 矩陣，盖

$$SC=\begin{bmatrix} \langle \mathbf{s}^1, \mathbf{c}_1\rangle & \langle \mathbf{s}^1, \mathbf{c}_2\rangle & \cdots & \langle \mathbf{s}^1, \mathbf{c}_\nu\rangle \\ \langle \mathbf{s}^2, \mathbf{c}_1\rangle & \langle \mathbf{s}^2, \mathbf{c}_2\rangle & \cdots & \\ & & & \\ \langle \mathbf{s}^n, \mathbf{c}_1\rangle & & \cdots & \langle \mathbf{s}^n, \mathbf{c}_\nu\rangle \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

由此，若已知關数矩陣 C, 可用方程 $SC=0$ 来确定关于弧的投射矩陣；于此，只須解方程 $C^*\mathbf{s}=0$, 以求出 S 的不同的行向量。这个注解，在继电器理論里有很多应用。

【組 1】（奥卡大, S. Okada）一个未知的继电器，由八个断續器 $u_1, u_2, \cdots, u_8$ 构成（簡記为 1, 2, …, 8）。这八个断續器按某种未知的方式，装在位置 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 之間，要求确定这个继电器的几何形状。为此，就来观察，看同时接通那一組断續器，使电流暢通电灯放光。

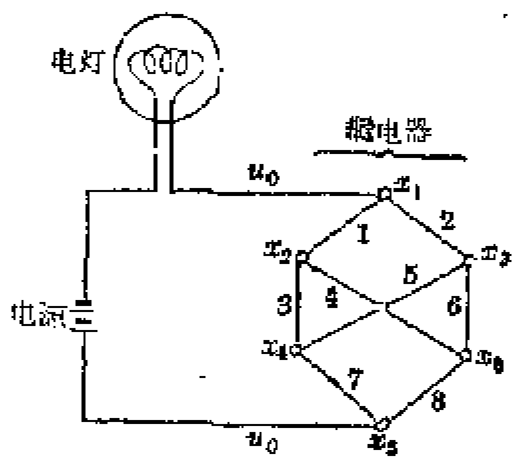


图 15-3

断續器的各种組合，而使电灯放光的是：13568, 137, 14567, 148, 23458, 23467, 257, 268。

由此，可构造矩陣 C, 但仅知其元素除去 2 的倍数后为

$$
C=\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} \\ u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{array}.
$$

去掉是其他列綫性組合的那些列，且按主对角綫作一对称，得

$$
C^*=\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}.
$$

故須解方程 $C^*t\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ 2)$，即解

$$
\begin{cases}
t_1+t_2+t_4+t_6+t_7+t_9\equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ 2), \\
t_2+t_3+t_5+t_6+t_8+t_9\equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ 2), \\
\qquad\qquad t_4+t_5+t_8-t_9\equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ 2), \\
\qquad\qquad t_6+t_7+t_8-t_9\equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ 2).
\end{cases}
$$

找出独立解的基础解系，这些独立解是下矩陣的行：

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}.
$$

一行一行地使用綫性組合，使每一列最多只含两个1，乃得图15-3上那个图 G 关于边的投射矩陣 R：

$$
R=\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{array}.
$$

第16章 树与树形图

45 树

从此以后，我們所感兴趣的，主要在于有限图非方向性的研究。$U=\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ 表示边的集合，U_x 表示过顶点 x 那些边的集合。在一个图里，若只有一条边过顶点 x，则 x 称为悬挂的，即 $|U_x|=1$；若沒有边过顶点 x，則 x 称为**孤立的**，即 $|U_x|=0$；同样，用 Γx 記用一条边联到 x 的那些顶点的集合。

一个有限图，連接无圈，且至少有两个顶点的，定义为一个树。这个由凱莱(Calley)引进的重要概念，也能用其他方式予以定义，下定理所陈述的六种等价的定义，其中每一种，以后都将用到：

定理 1 設 H 是一个 $|X|=n>1$ 阶的图，以下用以刻划一个树的諸特性，是等价的：

(1) H 連接且无圈；

(2) H 无圈且具 $n-1$ 条边；

(3) H 連接且具 $n-1$ 条边；

(4) H 无圈，但将不相邻的两个顶点，联以一边，便得一个(且仅一个)圈；

(5) H 是連接的，但去掉任一边，图便不連接；

(6) 有一条且仅有一条鏈連接每一对顶点。

(1)⇒(2)，盖若用 p 記分图的个数，m 記边的条数，则 $p=1$，$\nu=m-n+p=0$，故 $m=n-p=n-1$。

(2)⇒(3)，盖 $\nu=0$，$m=n-1$，故 $p=\nu-m+n=1$，H 是連接的。

(3)⇒(4)，盖 $p=1$，$m=n-1$，故 $\nu=m-n+p=0$：H 无圈。

若将两个非邻顶点，連以一边，则 ν 变为等于 1，故有一个且仅有一个圈。

(4)⇒(5)，盖若 H 不連接，则将有两个顶点 x 和 y 不相連接，联边 $[x, y]$，将不可能得圈，因此，$p-1$，$\nu=0$，故 $m=n-1$．但去掉一条边，便有 $m=n-2$，$\nu=0$，因而 $p=\nu-m+n=2$，H 便不再連接。

(5)⇒(6)，盖对任二顶点 x 与 y，恒存在一条鏈，自一个顶点走向另一顶点(因 H 是連接的)，但不能存在两条(因若去掉仅属于第二条鏈的某一边，将不能把图截断)。

(6)⇒(1)，盖若 H 有圈，则去掉圈的一边，将不能把图截断。

定理 2 一个树至少有两个悬挂点。

設 H 是一个树，有零个或一个悬挂点。一个旅行者，在图上游行，自任一点出发(在第一种情况)，或自悬挂点出发(在第二种情况)，若同一边决不使用两次，则同一顶点，将不可能遇到两次(因 H 无圈)；但另一方面，当旅行者到达一点 x 之后，他总能沿一新边前进(因若 x 不是悬挂点，$|U_x|\geqslant 2$)。如此一来，旅行者便可永远游行下去，但图是有限的，这不可能。

定理 3 图 $G=(X, U)$ 有一个部分图，而这个部分图是一个树，其必要和充分条件为原图是連接的。

若 G 不連接，则其任一部分图皆不連接，故 G 不可能有部分树。

若 G 是連接的，在图上寻觅，是否可以去掉某一边，而不截断該图。若这样的边根本不存在，则由性质 (5)，G 便是一个树；若有这样的边存在，去掉这一边，重新寻找可以去掉的新边，等等。

一直到不能再去掉任何边时，便已得一个树(性质 5)，其顶点集合显仍为 X．遂得欲証。

这个定理給出一个作图的部分树的法則。这个法則可因下面

的問題而得到推广。

問題 1 研究一个連接图 $G=(X, U)$，对每一边 u，給定一个数 $l(u)$，作为它的长度，試求图的一个部分树 $H=(X, V)$，使其总长 $\sum_{u\in V} l(u)$ 达到极小。

【例 1】 这个問題在电信綫路及其他許多情况中經常遇到。例如要求解决这样的問題：在已知的 n 个城市之間，电信联系所必須的最短电綫該多长？这些城市便是图的頂点，$l(x, y)$ 是 x, y 二城間距离的公里数。所要寻求的电綫网絡是連接的，且具最小长度，这个图不应有圈；即这个网絡应是一个树。于是此处所要寻求的，是一个作为具 n 个頂点的完备图的部分图而尽可能"短"的树。

首先建立下面的引理。

引理 若 $G=(X, U)$ 是一个完备图，且諸边的长度 $l(u)$ 各不相同，則問題 1 有一个且仅有一个解 (X, V)；集合 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}\}$ 按下法求得：取最短的一边作为 v_1；作为 v_2，則取具右列性质最短的一边，$v_2\neq v_1$ 且 $V_2=\{v_1, v_2\}$ 不构成圈；同样，作为 v_3，取具右列性质最短的一边，$v_3\neq v_1$，$v_3\neq v_2$，且 $V_3=\{v_1, v_2, v_3\}$ 不含圈，等等。

按引理所云，作出集合 $V_1, V_2, \cdots, V_k$，并設 V 已不能再加进一边，而使所得結果不含圈。按性质 (4)，图 (X, V_k) 是一个树，且按性质 (2)，有 $k=n-1$。

設 (X, V) 是一个树，其总长 $\sum_{u\in V} l(u)$ 极小，茲往証 $V=V_{n-1}$。

若 $V\neq V_{n-1}=\{v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}\}$，設 v_k 是 $v_1, v_2, \cdots$ 中第一个不在 V 里的边。

按性质 (4)，在 $V\cup\{v_k\}$ 中有一个且仅有一个圈；而在这个圈上存在一边 $u_0\notin V_{n-1}$。若取 $W=(V\cup\{v_k\})-\{u_0\}$，則图 (X, W) 无圈，且含 $n-1$ 条边，故这个图是一个树（性质 2）。

$V_{k-1}\cup\{u_0\}$ 无圈（因同属于 V），故 $l(u_0)>l(v_k)$。仅因将

u_0 换成 v_k，自树 (X, V) 推导出来的树 (X, W)，其总长小于 (X, V) 的总长；但原設 (X, V) 是一个最"短"的树，遂得矛盾。

解問题1的法則(克鲁斯卡尔,Kruskal[6]) 法則是一步一步地进行,每次选择一条最短边,而这条边和已經选定的边不构成圈。

按照这个方式,最后选定一个 $n-1$ 条边的集合 $V_{n-1}=\{v_1, \cdots, v_{n-1}\}$，图 (X, V_{n-1}) 便是总长极小的树。

事实上，我們可以事先做一种安排，使所有的边，各具不同的容量；譬若 $l(u_1)=l(u_2)=l(u_3)$，可作变动：

$$l(u_1)\to l'(u_1)=l(u_1)+\varepsilon,$$

$$l(u_2)\to l'(u_2)=l(u_2)+2\varepsilon,$$

$$l(u_3)\to l'(u_3)=l(u_3)+3\varepsilon,$$

取 ε 充分小，使不致引起边的大小次序的改变。

同样，也可以做一种安排，使图成为完备的，这只須連接一些充分长的边 w_k，使

$$l(w_k)>\sum_{u\in U} l(u)$$

卽可。

在新图里，存在一个且仅存在一个树 $H=(X, V_{n-1})$，总长极小；按定理 3，V_{n-1} 不包含諸边 $w_k\notin U$，盖

$$l(w_k)>\sum_{u\in U} l(u).$$

因此，H 恰是 G 的部分树，总长极小。

于此，可注意的是若所有的边各具不同的长度，树 H 是唯一确定的。同样可注意的是也可以采用一种对偶的方式来进行：逐步去掉最长的边而不切断原图。

确定独立圈一个基底的法則 假定图 $G=(X, U)$ 是連接的(在相反的情况，可以分别考虑每个分图)。首先，象上面那样，作一个树 (X, V_{n-1})。設 $u_1, u_2, \cdots, u_{m-n+1}$ 是 U 不在 V_{n-1} 里的边，将这些边中的任一边，譬如 u_k，加进树 (X, V_{n-1}) 里，得一个

圈 μ_k，且仅得一个圈[性质(4)]。圈 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$ 等恰是綫性无关的，盖其中每一个均有一条边不含在其他圈內；共有 $m-n+1=\nu(G)$ 个圈，因此，正好确定了独立圈的一个基底。

于此須指出，当图是平面的，可用一种更为簡单的方法，来确定独立圈的一个基底，以后将見此法(第 21 章定理 1)。

【例 2】 研究一个对称的运輸网絡 (X, U)，其发点为 x_0，收点为 z；用边 $[x_0, z]$ 联发点与收点，且給每一边以任一方向。若网絡的流，順着边 u 的方向通过 u，在边 u 上的流量 $\varphi(u)\geqslant 0$，反之，则 $\varphi(u)\leqslant 0$，由此乃有

$$\sum_{u\in U_x}\varphi(u)=0 \quad (x\in X).$$

現在来解决下面的問題：

确定流 φ，使其在边 $u_1, u_2, \cdots, u_k$ 上取給定的值 $\varphi(u_1)=\lambda_1$，$\varphi(u_2)=\lambda_2, \cdots, \varphi(u_k)=\lambda_k$。

譬如在图 16-1 的那个网 G 里，希望得到：

$$\varphi(u_1)=6,\quad \varphi(u_2)=\varphi(u_3)=1,\quad \varphi(u_4)=\varphi(u_5)=\varphi(u_6)=2.$$

于此，去掉記以 $u_1, u_2, \cdots, u_6$ 的边和边 u_7 以作出一个树(表以粗綫)；每一条边 u_i $(i\leqslant 6)$ 和这个树确定唯一的一个圈 μ_i，在这个圈上作一个循环的流，使其量等于 $\varphi(u_i)=\lambda_i$ [在 μ_7 上则作一个取任意流量 $\varphi(u_7)=\lambda$ 的循环流]。

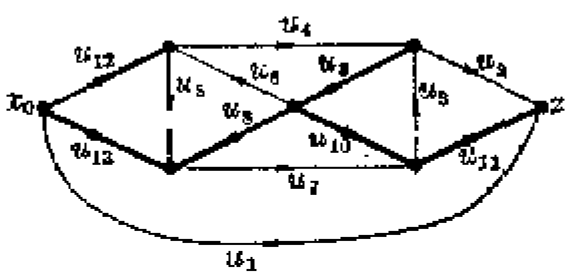


图 16-1

将这些流一边一边地加起来，便得欲求的流(这个流依参数 λ 而变)。在每一边上的流量 $\varphi(u)$ 由下表給出：

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}
在 μ_1 上的流量：	+6							−6		+6	+6		+6
在 μ_2 上的流量：		+1							+1	−1	−1		
在 μ_3 上的流量：			+1						−1	+1			
在 μ_4 上的流量：				+2				+2	−2			+2	−2
在 μ_5 上的流量：					+2							+2	−2
在 μ_6 上的流量：						+2		−2				−2	+2
在 μ_7 上的流量：							$+\lambda$	$+\lambda$		$-\lambda$			
φ =	6	1	1	2	2	2	λ	$\lambda-6$	−2	$6-\lambda$	5	2	4

若边的丢弃截断原图，则問題一般无解。

46 解析研究

考虑一个 n 行 m 列的矩陣 $A=(a_j^i)$，且取 $N=\{1, 2, \cdots, n\}$，$M=\{1, 2, \cdots, m\}$. 常将矩陣 A 写成 a_N^M 形式；若 $I\subset M$, $J\subset N$，去掉其指标不在 I 里的列及其指标不在 J 里的行，所得的子矩陣記以 a_J^I. 首先回忆行列式的两个著名公式，其証見有关专著。

拉普拉斯公式 設 a_N^N 为 n 阶矩陣，且設 $k\leqslant n$，則

$$\operatorname{Det}(a_N^N)=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}(-1)^{i_1+\cdots+i_k+1+2+\cdots+k}\operatorname{Det}(a_{\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}}^{\{1,2,\cdots,k\}})\times\operatorname{Det}(a_{N-\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}}^{N-\{1,2,\cdots,k\}}).$$

(若取 $k=1$，便得行列式按其第一行諸元素的展开式。)

比内-歌西 (Binet-Cauchy) **公式** 設 a_N^N 与 b_N^N 为二 n 阶矩陣，且設 $k\leqslant n$，則

$$\operatorname{Det}(a_N^K b_K^N)=\sum_{\substack{|I|=k\\ I\subset N}}\operatorname{Det}(a_I^K)\operatorname{Det}(b_K^I).$$

于此，K 表集合 $\{1, 2, \cdots, k\}$. 若 $k=n$，便得两个方陣乘积的行列式公式。

現在来研究含 n 个頂点 m 条边的图 $G(m\leqslant n)$；任給諸边以方向之后，可得关于弧的投射矩陣 $S=s_N^M$. 方陣 s_H^H 对应于頂点 x_1, x_2, $\cdots$, x_m 及弧 u_1, u_2, $\cdots$, u_m；一組这样的頂点和一組这样的弧所形成的偶对，定义为一个綫性构形 H. 但一般这并不构成一个图，因可能有某一边含在 H 内，而其端点不在 H 内("飘浮"边)，或者仅其一个端点含在 H 内("悬挂"边)。于此有

定理 4 設綫性构形 H 由 m 个頂点 x_1, x_2, $\cdots$, x_m 及 m 条弧 u_1, u_2, $\cdots$, u_m 所构成，若 H 包含某一个圈的弧，則 $\operatorname{Det}(s_H^H)=0$.

事实上，設 u_1, u_2, $\cdots$, u_k 构成一个圈，且設 H 在这个圈上的

顶点是 $x_1, x_2, \cdots, x_i\ (i\leqslant k)$，可书

$$s_M^M=\begin{bmatrix} s_K^K & s_{M-K}^K \\ 0 & s_{M-K}^{M-K} \end{bmatrix}.$$

按拉普拉斯公式，有

$$\mathrm{Det}(s_M^M)=\pm\mathrm{Det}(s_K^K)\mathrm{Det}(s_{M-K}^{M-K})+0.$$

若 $i=k$，有

$$\mathrm{Det}(s_K^K)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

(因行向量之和为零)。此外，若 $i<k$，则也有 $\mathrm{Det}(s_K^K)=0$，盖其第 k 行为零，总之，恰有 $\mathrm{Det}(s_M^M)=0$。

定理 5 由 $m+1$ 个顶点 $x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}$ 及 m 条边 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ 构成的图 G 是一个树的必要和充分条件，为自投射矩阵 s_M^N 除去第 $m+1$ 行所得到的方阵 s_M^M，其行列式等于 $+1$ 或 -1，而在其他情况，行列式为零。

1° 設 G 是 $n=m+1$ 阶的图，且 $\mathrm{Det}(s_M^M)\neq 0$；按定理 4，$G$ 不含圈，但 G 含 $n-1$ 条边，故 G 是一个树[定理 1 性质 2]。

2° 設 G 是由顶点 $x_1, x_2, \cdots, x_{m+1}$ 所成的树；不动 x_{m+1}，改变弧和其他顶点的編号(这不过对换了行列式的行与行及列与列，$\mathrm{Det}(s_M^M)$ 最多不过改号)。按定理 2，树 G 有一个异于 x_{m+1} 的悬挂顶点，将这个悬挂点記为 x_1，而将过这点的边記为 $\boldsymbol{u}_1$；去掉 x_1 与 $\boldsymbol{u}_1$，重新定义一个顶点 x_2 及边 $\boldsymbol{u}_2$；再去掉，再定义，等等。据新的記法，乃有

$$\mathrm{Det}(s_M^U)=\begin{vmatrix} \pm1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1^2 & \pm1 & 0 & \cdots & 0 \\ s_1^3 & s_2^3 & \pm1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ s_1^{m'} & & & \cdots & \pm1 \end{vmatrix}=\pm1.$$

証毕

定理6（特朗特，Trent 的証明） 在一个沒有环的图 G 里，作为 G 的部分图的不同的树的个数，等于 n 阶方陣

$$B=(b_j^i):b_j^i=\begin{cases}|\Gamma x_i| & \text{若 } i=j,\\ -1 & \text{若 } i\neq j,\ [x_i,x_j]\in \boldsymbol{U},\\ 0 & \text{若 } i\neq j,\ [x_i,x_j]\notin \boldsymbol{U}\end{cases}$$

主对角綫上随便那个元素的一个子行列式。

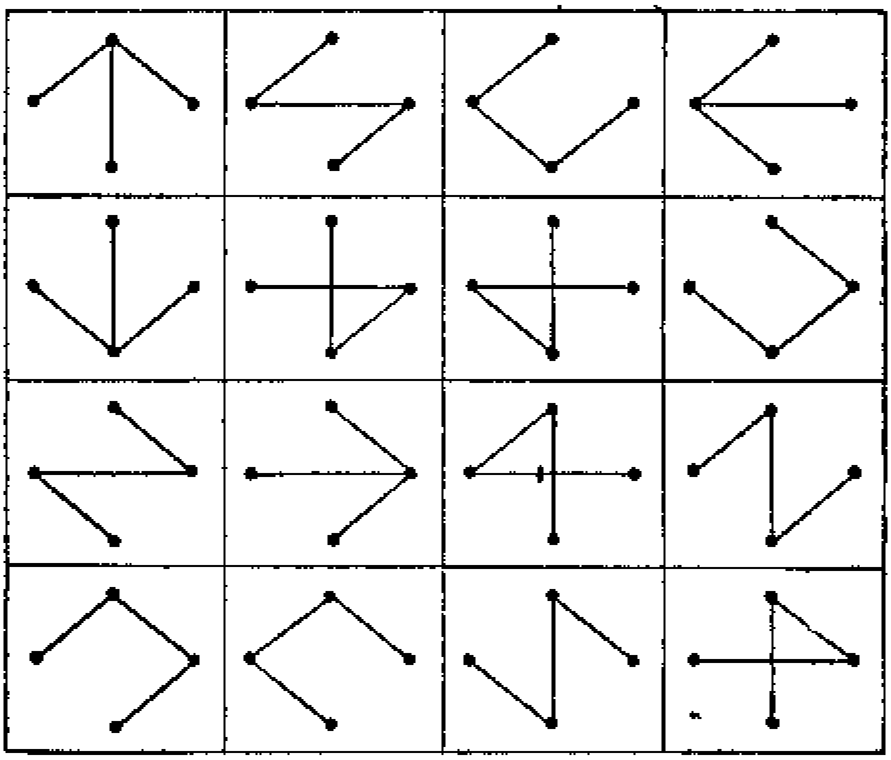


图 16-2

給 G 的各边以任一方向，并构造关于弧的投射矩陣 $S=s_M^N$。矩陣 SS^* 的一般元素是

$$\langle s^i, s_j^*\rangle = \langle s^i, s^j\rangle = s_1^i s_1^j + s_2^i s_2^j + \cdots + s_m^i s_m^j$$

$$= \begin{cases} |\Gamma x_i| & 若\ i=j, \\ -1 & 若\ i\neq j,\ [x_i, x_j]\in U, \\ 0 & 若\ i\neq j,\ [x_i, x_j]\notin U. \end{cases}$$

遂有 $\langle s^i, s_j^*\rangle = b_j^i$；若取 $K=\{1, 2, \cdots, k=n-1\}$，则按比内-歌西公式，元素 b_n^n 的子行列式等于

$$\Delta_n = \mathrm{Det}(b_K^K) = \mathrm{Det}(S_M^K \cdot S_K^{*M}) = \sum_{\substack{I\subset M \\ |I|=n-1}} \mathrm{Det}(s_I^K)\mathrm{Det}(s_K^{*I})$$

$$= \sum_{\substack{I\subset M \\ |I|=n-1}} |\mathrm{Det}(s_I^K)|^2.$$

按定理 5，最后一项等于所能自 G 得出的 n 个顶点的树的个数。

【例 1】 图 16-2 (副) 的那个图，共有 16 个部分树；这个数恰好等于子行列式

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 16.$$

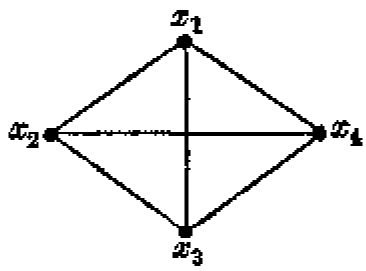


图 16-2 (副)

这个图是完备的，这个结果也可以直接求得，具四个顶点的不同的树的总数是 $n^{n-2}=4^2=16$。

这 16 个部分树由图 16-2 给出。

47 树 形 图

有限图 (X, U)，若：

1° 每一顶点 $\neq x_1$ 是唯一一条弧的終点，

2° x_1 不是任何弧的終点，

3° (X, U) 不含回路，

则这个图称为以 x_1 为根的树形图。

定理 7 每一个树形图都是一个树。

設 H 是一个以 x_1 为根的树形图；按 3°，H 有同样多的弧与边。若 n 是頂点的个数，m 是边的条数，乃有

$$m=n-1.$$

此外，H 不含圈，盖 H 不含回路，而在任一不是回路的圈里，总含有一个頂点，至少是两条弧的終点。因此，H 恰是一个树。

树形图的形状，是甚易认識的；它是一个树，对于每一边，有一个唯一确定的方向；此外，对每一頂点 x，总存在一条路自 x_1 走向 x（盖一个位于 x 的旅行者，沿图的弧，按相反的方向行进，则不到 x_1 不能終止）。

【例1】（平面几何学） 考察平面上 $n-1$ 个互不相交的圓。这 $n-1$ 个圓的每一位置，可以用一个 n 个頂点的树形图来表示（半徑无限长的圓作为根 x_1）。当 $n=4$，可以求得四种可能的不同位置，对应于图 16-3 的四个树形图。

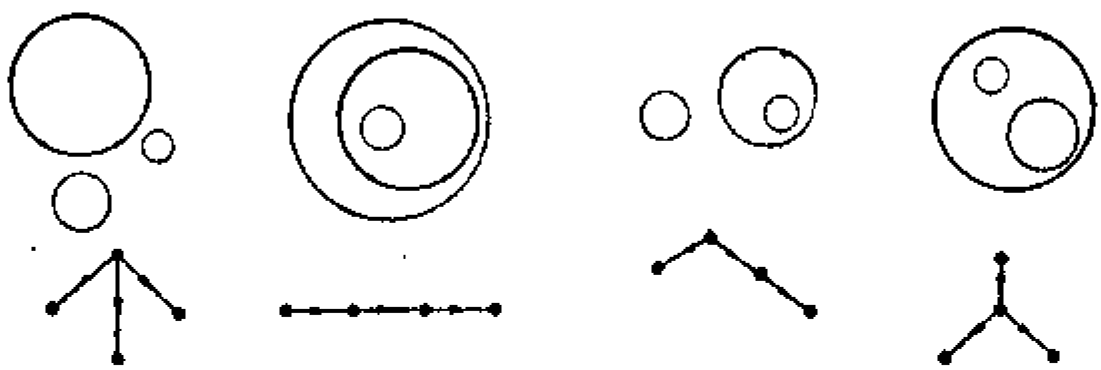


图 16-3

【例2】［括号的理論（呂卡謝維茲，Lukasiewicz）］ 現在研究一个集合 $A=\{a, b, c, \cdots\}$，及在 A 上的一个运算。这个运算可易而不可群：譬如 $a\cdot(b\cdot c)\neq(a\cdot b)\cdot c$。在代数里，若干个运算結合的結果，称为**单項式**：例如 $u=[(a\cdot b)\cdot c]\cdot([d\cdot(e\cdot f)]\cdot g)$。对这样的单項式，作图 16-4 的树形图与之相应，这个图是"二权的"，对每一頂点 x，恒有 $\Gamma x=0$ 或 2。

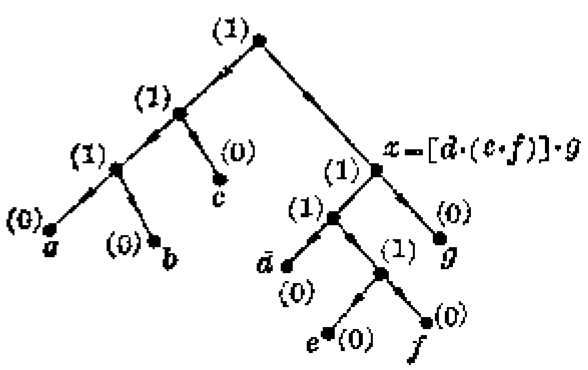


图 16-4

若运算 · 是不可易的,須用一个拓扑图。所謂拓扑图,即一个实际上能在有向平面里表現出来的图。呂卡謝維茲提出用序列 $a\ b\ c\ d\ e\ f\ g$ 后跟序列 1110001101000 来表示这个单項式 u (后一序列的获得,乃在悬挂点旁記以 0,在非悬挂点旁記以 1,而这个树的連接,一如中国字的写法:自上而下,自左到右(1))。

对于树形图,我們提出和树同样的問題;尤其是:什么样的(有向)图 G,才具有是树形图的部分图? 設 $A=(a_j^i)$ 是 G 的联系矩陣,构造对角矩陣 $D=(d_j^i)$,其中

$$d_j^i\begin{cases}=0 & \text{若 } i\neq j,\\ =\Gamma^{-1}x_i & \text{若 } i=j.\end{cases}$$

矩陣 $D-A=(d_j^i-a_j^i)$ 便可写为

$$D-A=\begin{pmatrix} \sum\limits_{i\neq 1}a_1^i & -a_2^1 & \cdots & -a_n^1\\ -a_1^2 & \sum\limits_{i\neq 2}a_2^i & \cdots & -a_n^2\\ -a_1^3 & -a_2^3 & \cdots & -a_n^3\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_1^n & -a_2^n & \cdots & \sum\limits_{i\neq n}a_n^i \end{pmatrix}.$$

其行列式等于 0 (因各行之和为零)。

在这个行列式里,去掉第 k 行和第 k 列的子行列式記为 $\Delta_k=\Delta_k(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$;这个子行列式与向量 $\boldsymbol{a}_k$ 无关。

〔注〕 $\Delta_k(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$ 是列向量 $\boldsymbol{a}_j$ 的綫性函数,即

$$\Delta_k(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_1',\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=\Delta_k(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)+\Delta_k(\boldsymbol{a}_1',\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$$

$$\Delta_k(\lambda\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n)=\lambda\Delta_k(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n).$$

証明是很明显的。

定理 8 設 G 是一个无环的,联系矩陣为 A,有 $m=n-1$ 条

---

(1) 自这一注解,甚易推得,不同的二杈的而具 n 个悬挂点的树形图,其个数为

$$\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}.$$

弧的图;则当且仅当 $\Delta_1=1$ 时,这个图是一个以 x_1 为根的树形图;在其他一切情况,皆有 $\Delta_1=0$.

1° 設 G 是一个以 x_1 为根的树形图，则元素 a_i^i 等于 $|\Gamma^{-1}x_i|=1$ $(i=2, 3, \cdots, n)$;将图的顶点加以序列,使在一条路上的顶点,其指标是递升的(若 G 是一个树形图,这总是可能的);遂有

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & -a_3^2 & -a_4^2 & \cdots & -a_n^2 \\ 0 & 1 & -a_4^3 & \cdots & -a_n^3 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -a_n^4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=1.$$

2° 設 $\Delta_1\neq 0$, 往証 G 是一个以 x_1 为根的树形图。每一顶点 x_k $(k\neq 1)$ 至少是 G 的某一条弧的終点(若不如此,则 Δ_1 的第 k 个列向量等于零,因有 $\Delta_1=0$)。

此外，象在定理 5 一样，G 是連接的，且是反对称的(否则 $\Delta_1=0$)。这个图連接,具 $n-1$ 条边,因而是一个树(性质 3)。所有异于 x_1 的顶点，都是一条弧的終点(因弧不多于 $n-1$ 条)；由此，G 恰是一个以 x_1 为根的树形图。

定理 9 (涂特，鮑特，Tutte, Bott)　設 G 是一个无环而联系矩陣为 A 的图；作为 G 的部分图而以 x_1 为根的树形图,其个数为 Δ_1.

事实上，用 $\boldsymbol{e}_k=(0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)$ 記第 k 个元素为 1，其他元素統为零的 n 維向量。取

$$K_i=\{k/(x_k, x_i)\in U\},$$

则

$$\Delta_1(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \cdots, \boldsymbol{a}_n)=\Delta_1\Big(\sum_{k_2\in K_2}\boldsymbol{e}_{k_2}, \sum_{k_3\in K_3}\boldsymbol{e}_{k_3}, \cdots\Big)$$

$$=\sum_{\substack{k_2\in K_2\\ k_3\in K_3\\ \cdots\cdots}}\Delta_1(\boldsymbol{e}_{k_2}, \boldsymbol{e}_{k_3}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_n}).$$

但按定理 8，当 $n-1$ 条弧 (x_{k_1}, x_2)，(x_{k_2}, x_3)，… 构成以 x_1 为根的树形图时，$\Delta_1(e_{k_1}, e_{k_2}, \cdots, e_{k_n})=1$，而在其他一切情况，这个子行列式等于 0．遂得欲証。

〔注 1〕 上面的論証，实际上証明了一个更强的論断，这个論断可按下述方式来形成：研究一个由无环图 G 及容量 $c(u)$ 构成的网絡，并設 $C=(c_j^i)$ 为其联系矩陣，其中 $c_j^i=c(x_i, x_j)$．构造对角矩陣 $D=(d_j^i)$，其 $d_i^i=\sum\limits_{k\neq i}c(x_k, x_i)$，以及行列式 $\Delta=\mathrm{Det}(D-C)$．若 $H=(X, \Gamma)$ 是以 x_1 为根的树形图，取

$$c(H)=\prod_{\substack{x\in X\\ y\in\Gamma x}}c(x, y).$$

于是：**行列式 Δ 的子行列式 Δ_1 等于 $c(H)$ 之和，其中 H 是以 x_1 为根作为 G 的部分图的一切树形图。**

这个結果，乃包特与昧波立（Bott et Mayberry）[2] 为了計算在經济学上所遇到的某些矩陣的行列式而建立的。

【例 3】 考察行列式

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}4 & -1 & -2\\ -1 & 3 & -1\\ -2 & -2 & 5\end{vmatrix}.$$

这个行列式对应于一个仅其第一列为未定的矩陣 $D-C$，

$$D-C=\begin{bmatrix}d_1^1 & -1 & 0 & -2\\ -c_1^2 & 4 & -1 & -2\\ -c_1^3 & -1 & 3 & -1\\ -c_1^4 & -2 & -2 & 5\end{bmatrix}.$$

由此导出图 16-5 上的网絡。

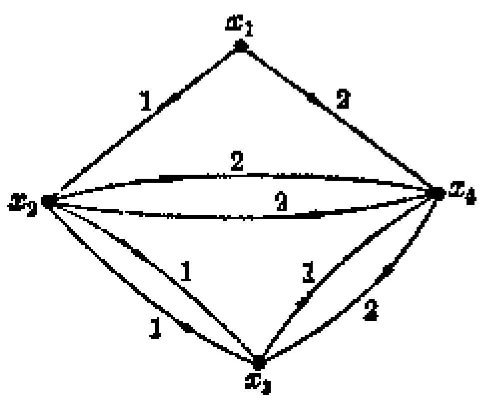


图 16-5

作出图16-6上那个表里所标出的一切值 $c(H)$ 之和，得 29；讀者可以驗證，这就是行列式 Δ_1 之值。

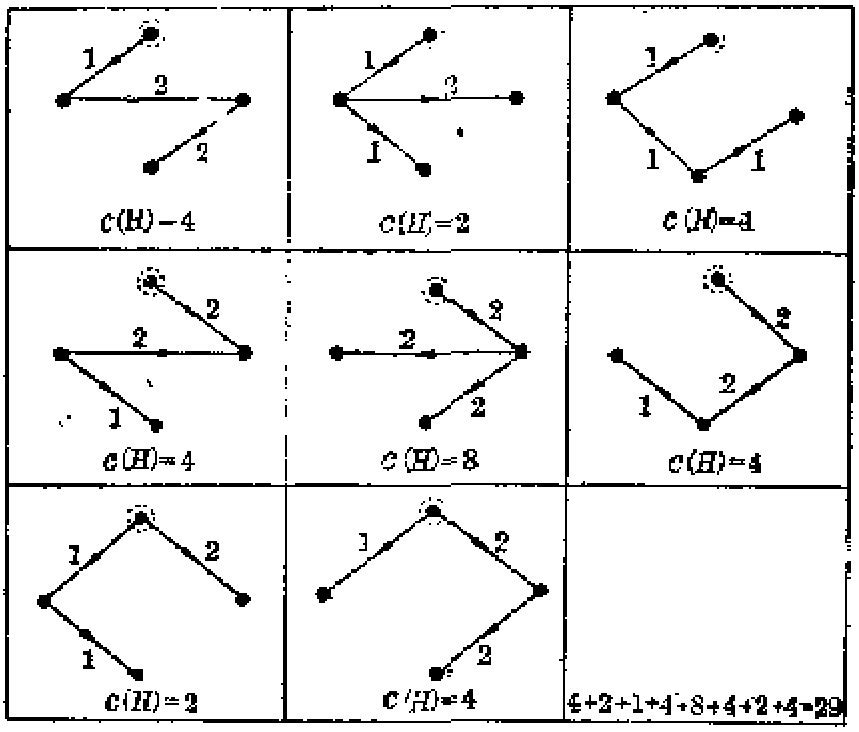


图 16-6

〔注2〕 設 G 是一个对称、无环、联系矩陣为 A 的图；作为 G 的部分图的对称树，其个数等于以 x_k 为根的树形图的个数，由定理 9，等于

$$\Delta_1=\Delta_2=\cdots=\Delta_n.$$

由此乃重新求得定理 6 的論断。

第17章 尤拉問題

48 尤拉圈

尤拉所提出的許多位置几何学的老問題，其中一个可叙述如次：一条鏈(圈)使用每一边一次且仅一次的称为**尤拉鏈**(**尤拉圈**)。怎样識别一个图具有尤拉鏈或尤拉圈呢？

【例1】 研究标示在图17-1上的那个图，能否一笔画出这个图，而不过同一条边两次？經反复試驗，讀者仍不能判断这个問題是不可能的。相反，图17-2的那个图，則可以一笔画出：为什么？

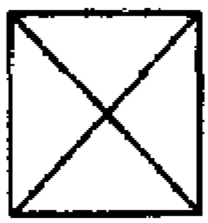


图 17-1

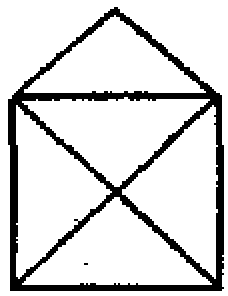


图 17-2

【例2】 (尤拉) 普雷格尔河横貫肯尼希堡城，奈发夫島居于河的中央，河上共架七桥，如图17-3所示。問一个步行者能否遨游全市，經过每一座桥一次且仅一次？1736年肯尼希堡的居民对此問題甚感兴趣，当时尤拉便已指出这个問題是不可能的。

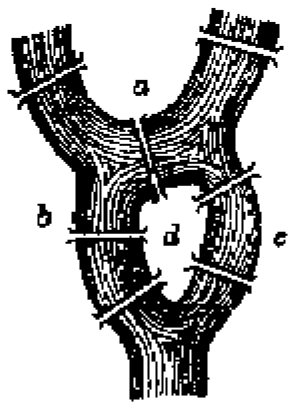


图 17-3

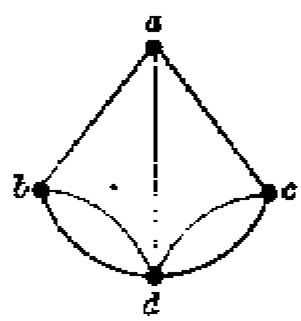


图 17-4

若考察图17-4的那个图 G，其頂点代表四个区域 a, b, c, d，而每一边代表一座桥，則这个問題归結为寻求一条尤拉鏈。

定理1 一个多重图具有尤拉鏈的必要和充分条件是奇次頂点的个数为0或2。

1° 条件是必要的；盖若存在一条尤拉鏈 μ，图 G 显是連接的。此外，μ 的两个端点（若二者相异）是仅有的奇次点，除0或2个奇次点外，这个图不可能再有其他奇次点。

2° 条件是充分的。現在来証明下面更为明确的事实：若有两个奇次頂点 a 与 b，則存在一条尤拉鏈起于 a 而止于 b；若沒有奇次点，則存在一个尤拉圈。

設論断对于少于 m 条边的图已成立，往証这个論断对于 m 条边的图 G 也成立。为了固定思維，設 G 有两个奇次頂点 a 与 b。

一个游行者，自 a 按任一方向出发，但决不在任一边上行走两次，便可定出鏈 μ。当游行者到达一点 $x\neq b$，若他只使用了过 x 点的奇数条边，他將仍能沿某一边前进；当他无法再前进时，他必已到达了 b。然而在这样一个自 a 到 b 的任一游行路綫里，可能所有的边沒有全被使用。因此，將剩下图的一部分 G'，其所有頂点都是偶次的。

設 $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_k$ 是 G' 的分图，各分图至少有一条边，按归納假設，这些分图各有尤拉圈 $\mu_1, \mu_2, \cdots$，但因 G 是連接的，鏈 μ 必連續和所有的 C_i 相遇，譬如和各个分图相遇于点 $x_1\in C_1, x_2\in C_2, \cdots, x_k\in C_k$（按这样的順序）。

考査鏈：

$$\mu[a, x_1]+\mu_1+\mu[x_1, x_2]+\mu_2+\cdots+\mu[x_k, b].$$

这恰是一条自 a 走向 b 的尤拉鏈。 証毕

一眼看上去，讀者便可証明，在肯尼希堡的那种游行是不可能的（例2）。

〔注〕 同样可見,一个連接的有四个奇次頂点的多重图,可以两笔画出,而一个連接的有 $2q$ 个奇次頂点的多重图,可以 q 笔画出。

直接画出尤拉圈的法則(福留蜺, Fleury) 研究一个連接的多重图 G,其每一頂点都是偶次的,現在要求一笔画出所有的边而不加修正或补充。只須注意下面的規則卽足:

1° 自任一頂点 a 出发,每走过一边,便将这边抹去。

2° 在行进的过程中,决不使用地峽边 u(卽在那时,把 u 抹去,将产生至少各有一边的两个連接分图)。

若遵循这个規則,我們將总处于有利地位;盖当行进至 $x\neq a$,图有两个奇次点 x 和 a;除去孤立点,剩下一个連接图,按定理 1,这个图有一条自 x 出发的尤拉鏈。

現在所須进一步証明的,是我們总能遵循这个規則,卽謂:当游行者到达一个岔道口 x 时,总有一条自此出发的非地峽边。事实上,若所有过 x 的边都是地峽边,則至少將有两条这样的边(因若 $|U_x|=1$,則过 x 的这条边将仅是"悬挂"的),这两边联到两个互不相交的連接分图,每个分图有一个奇次頂点,但(除 x 之外)仅有頂点 a 是奇次的,遂得矛盾。

49 尤 拉 回 路

将以上那些概念,推广到有向問題,将是饒有兴趣的;在有向图 (X, U) 里,一条**尤拉回路**,乃是一条回路,使用每一条弧一次且仅一次。那么,那些图具有尤拉回路呢?

一个图,在每一頂点上,进入几条弧,也同样发出这么多的弧,换言之,卽

$$|U_x^+| = |U_x^-| \quad (x\in X),$$

則这个图称为拟对称的。

这个名詞的正确性,实由于每一对称图也是拟对称的这一事

实；于此，有

定理 2　一个图具有尤拉回路的必要和充分条件，是这个图連接且拟对称。

（其証恰如定理 1。）

【例 1】（鮑斯涂姆斯，*Posthumus*）　用 0 和 1 构造循环序列，使每 k 个連續号碼所构成的那个部分，在序列里出現不超过一次，問最长的序列是什么？用 0 和 1 仅能构成 2^k 个不同的 k-塔，故这样的序列，不能含有多于 2^k 个号碼；借助于定理 2，可以証明，确能构造这样一个含 2^k 个号碼的循环序列。

現在来研究图 G，其頂点为由 0 与 1 构成的不同的 $(k-1)$-塔，自每一頂点 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1})$，到两頂 $(\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{k-1}, 0)$ 与 $(\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{k-1}, 1)$ 各联一弧。图 G 是拟对称的，具有尤拉回路，若 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{k-1})$ 是这个回路的第一个頂点，$(\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_k)$ 便是第二点，$(\alpha_3, \alpha_4, \cdots, \alpha_{k+1})$ 是第三点，等等，欲求的序列便是 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\cdots$。

取 $k=4$，图 17-5 的那个图，为我們提供了許多含 $2^4=16$ 个号碼的循环序列，其中有

$$abcdefghijklmnpq = 0000101001101111$$
$$abcdkijefghlmnpq = 0000101101001111$$

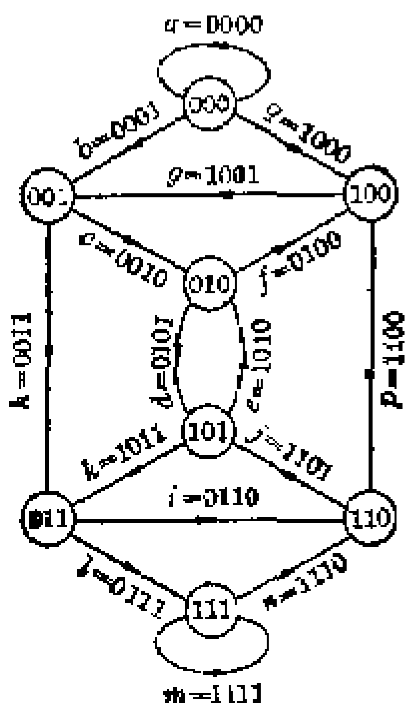


图　17-5

$abcdkipghlmnjefq = 0000101100111101$

$abcfghijedklmnpq = 0000100110101111$

$abhijklmnpgcdefq = 0000110111100101$

$abhijedklmnpgcfq = 0000110101111001$

$abhijefgcdklmnpq = 0000110100101111$

$abhipgcdklmnjefq = 0000110010111101$

(这里省略了交换 i 与 lmn 所得的其他循环序列)。共得 16 个解[1]。

某些作者，曾考虑数出一个拟对称图所有不同的尤拉回路；这个問題和树形图的数出密切相关，后一問題已在前面(第 16 章)予以解决；尤拉回路和树形图的联系，异常密切，我們将首先提出下面的論断：

定理 3 設 G 是一个連接的拟对称图，x_1 是其一頂；則 G 具有以 x_1 为根作为一个部分图的树形图 H，这个树形图可按下述方式求得：自 x_1 出发，走遍 G 的一切弧，用第一次到达一个頂点的那些弧来构成 H.

H 确为以 x_1 为根的树形图，蓋：

1° 每一頂点 $\neq x_1$ 的，是唯一一条弧的終点，

2° x_1 不是任何弧的終点，

3° H 不含回路(因若有一条路，自 x 走向 y，由 H 的弧构成，則很明显，頂点 x 在頂点 y 之前被到达，因而不存在自 y 到 x 的路)。

定理 4 (阿尔登-艾倫費斯特，笛波恩恩，Aarden-Ehrenfest, de Bruijn) 在一个拟对称的連接图里，設 Δ_1 是以 x_1 为根作为部分图的树形图的个数，并設 r_k 是頂点 x_k 的外半次(或內半次)，則恰有

[1] 这个問題，在电信交通上有其应用，以便借助于两种刻度，用一次能讀出 k 度的讀数器，来标出分矢筒的位置。同样的問題，也在密碼里，按下列方式予以考虑：找出一个字系，使 k 个字母的每一种編排，于其中出現一次，且仅一次。

$$\Delta_1 \prod_{k=1}^{n} (r_k - 1)!$$

个相异的尤拉回路。

須注意者，两条尤拉回路，若第一条可以由第二条的弧的一个輪換得到，这两条回路便不能謂为相异。同样須提起注意的，由第16章定理9，Δ_1 是已知的。

現在来研究以 x_1 为根，作为 G 的部分图的树形图 H，且往証恰有

$$\prod_{k=1}^{n} (r_k - 1)!$$

条尤拉回路，其第一次引到一个頂点的弧都是 H 的弧。将引向 x_k 的弧，自1到 r_k 加以編号，使能写成

$$U_{x_k}^- = \{u_k(1), u_k(2), \cdots, u_k(r_k)\}.$$

定 $u_k(r_k)$ 为树形图 H 引向 x_k 的弧（若 $k \neq 1$），将 $u_1(1)$ 固定下来，恰有

$$\prod_{k=1}^{n} (r_k - 1)!$$

个可能的編号。每一編号，按下列方式，对应于唯一一条回路：自 $u_1(1)$ 出发，反向走过图的一切弧；每当到达一点 x_k，便在 $U_{x_k}^-$ 的弧里，选擇一条尚未用过而編号又最低的弧。

这样，确实确定了一条回路，盖这样行进，不可能停留在异于发点 x_1 的任一点上（在任意其他一点上，因图是拟对称的，到达这点之后，总还有边可供继續行进）。茲往証这条回路是尤拉型的。

事实上，若回路不是尤拉型的，則将有边 $u_k(j)$ 未曾用过；因 $r_k \geqslant j$，故弧 $u_k(r_k)$ 一定未曾用过；在这条弧的起点 x_p 上，同样必也有弧 $u_p(r_p)$ 未曾用过，等等。这些未曾用过的弧，都屬于树形图 H，一步一步推导下去，最后到达根 x_1，而有同样的情况；但这是矛盾，盖当止于 x_1 时，在 x_1 上的一切弧，在行进的过程中皆已

用过。

总之，对应于每一編号，具体确定一条尤拉回路，終于定弧 $u_1(1)$，且第一次引向一个頂点的弧是树形图的弧，定理証完[1]。

推理 在一个拟对称图里，以 x_k 为根，作为部分图的树形图的个数，与所选取的頂点 x_k 无关。

事实上，定理 3 也可用 x_k 替代 x_1 来加以叙述，因尤拉回路的个数是不变的，故有 $\Delta_1=\Delta_k$。

（讀者可按这种方式，驗証图 17-5 那个图中尤拉回路的条数恰为 16。）

---

[1] 当图的弧数 $m\geqslant 2n+1$，檢查尤拉回路，可以发现舒村貝尔格尔(M. P. Schutzenberger)最近形成的一个奇特的組合性质。实际上将一条尤拉回路 μ 看作图的弧的一个排列，按排列里反序个数的奇或偶，称 μ 是奇的或偶的，便有：在一个 n 阶而弧数 $m\geqslant 2n+1$ 的图 G 里，所有自某一已知弧开始的尤拉回路，恰好一半是奇的，一半是偶的。

当 $m=2n$，这个論断不再真实，可于下例見之：用过 n 个頂点的初級回路的弧 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 来构造一个图，且在这些頂点上各作一个环 $u_{n+1}, u_{n+2}, \cdots, u_{2n}$，則自某一弧开始，仅有一条尤拉回路，所述定理，乃不成立。

可以証明，n 阶图的这个特性，和在代数上有相当重要性的 n 阶矩陣族的某一特性等价（見：阿密特薩尔(A. S. Amitsur)与萊維茨基(J. Levitzki)定理，Proc. Am. Math. Soc., 1, 1950, p. 449）。

第18章 任意图的对集

50 交错鏈的理論

本章用 $\overline{G}$ 表示一个(无向)图,其頂点是 $\overline{a}, x_1, x_2, \cdots, x_n$. 在 $\overline{G}$ 里考虑两类边:其一全用粗綫画出,称为**粗边**;另一全用細綫画出,称为**細边**。最后,假定在所謂 $\overline{G}$ 的**原点** $\overline{a}$ 上,所有的边都是粗的。

$\overline{G}$ 的一条鏈 $\mu=(v_1, v_2, \cdots, v_k)$,若滿足下二条件:

1° 两边 v_j 与 v_{j+1} 相邻,則一条是粗的,一条是細的;

2° 鏈是簡单的,即謂一条已知的边,在序列 μ 里不出現两次;

則这条鏈称为**交錯鏈**。

若存在一条交錯鏈 μ, 自 $\overline{a}$ 走向 x, 則用一个箭头指向 x, 以确定这条鏈最后一边的方向;按照这样的方式,图 $\overline{G}$ 的一边,可能有两个方向,也可能只有一个方向,或者根本沒有方向。若頂点 x 是指向 x 的一条粗边的端点,且无細边指向 x, 則頂点 x 称为**粗点**;所有粗点的集合記为 E.

若頂点 x 是指向 x 的某一細边的端点,但无粗边指向 x, 称 x 为**細点**,所有細点的集合記为 F.

若頂点 x 同时是指向 x 的某一粗边和指向 x 的某一細边的端点,称之为**混合点**,所有混合点的集合記为 M.

最后,若頂点 x 根本不是某一指向 x 的边的端点,則称之为**不可接近点**,所有不可接近点的集合記为 I.

作为图 $\overline{G}$ 之原点的頂点 $\overline{a}$, 不做以上的区分:不存在交錯鏈自 $\overline{a}$ 出发,而又回到 $\overline{a}$ 的,則 $\overline{a}$ 是細点,否則 $\overline{a}$ 是混合点。

$\overline{G}$ 的頂点,无非是細的、粗的、混合的,与不可接近的,故

$E\cup F\cup M\cup I=X$. 于此，可立即推得下面的定理：

定理 1 两个粗点，仅能用一条粗边相連；两个細点，仅能用一条細边相連；一个混合点和一个不可接近点，不能用任何边相連；一个粗点和一个不可接近点只能用粗边相連；一个細点和一个不可接近点，只能用細边相連。

这个論断，可概括如下表：

	E	F	M	I
E	粗			粗
F		細		細
M				╳
I	粗	細	╳	

由集合 M 所构成的图 $\bar{G}$ 的子图，如有連接的分图，这些分图記以 M_1, M_2, ⋯；若鏈 μ 形如：

$$\mu=[\bar{a},\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k=a,\ b_1=b,\ b_2,\ \cdots,\ b_l]$$

且
$$\bar{a},\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k\notin M_1,$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_l\in M_1,$$

则称鏈 μ 用边 $[a, b]$ 进入 M_1.

引理 1 設 $\bar{a}\notin M_1$, $x\in M_1$；若交錯鏈 $\mu[\bar{a}, x]$ 用边 $[a, b]$ 进入 M_1，且終于一条粗(細)边，則存在交錯鏈 $\mu'[\bar{a}, x]$ 用边 $[a, b]$ 进入 M_1，而終于一条細(粗)边。

事实上，因 x 是一个混合点，故存在一条交錯鏈 $\nu[\bar{a}, x]$ 終于一条細边。又因 $\bar{a}\notin M_1$, $x\in M_1$，在 $\nu[\bar{a}, x]$ 中存在一些边，其一个端点在 $X-M_1$ 內，而另一端点在 M_1 內，設 $[c, d]$ 是最后一条这

样的边。

最后，設 y 是 μ 在 $\nu[d,x]$ 上的第一个点（总存在）。若 $\mu[b,y]$ 与 $\nu[d,y]$ 所終止的边属于同一类型，則定理将以交錯鏈

$$\mu'=\mu[\bar{a},y]+\nu[y,x]$$

而得証。

因此，可以假定情况不是这样的；但这时必有 $[a,b]=[c,d]$，盖若不然，$\mu[\bar{a},y]+\nu[y,c]$ 将是一个簡单且交錯的鏈，而点 c 是混合的，因而 $c\in M_1$。由此，可以推得

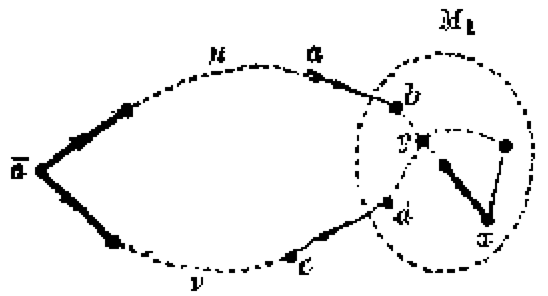


图 18-1

$$\mu'=\mu[\bar{a},b]+\nu[d,x]$$

是交錯的，且满足所提出的条件。

引理 2 設 $\bar{a}\notin M_1$，$x\in M_1$，而 $[a,b]$ 是内向交于 M_1 的边，則存在一条交錯鏈 $\mu[\bar{a},x]$，由 $\bar{a}$ 走向 x，而以边 $[a,b]$ 进入 M_1。

事实上，設 Y 是 M_1 的某些頂点的集合，这些頂点，可被一条用边 $[a,b]$ 进入的交錯鏈达到，設 Z 是 M_1 里不能如此的那些頂点的集合。于此，$Y\neq\varnothing$（因 $b\in Y$），若 $Z\neq\varnothing$，則将存在边 $[y,z]$，其 $y\in Y$，$z\in Z$。我往証这将引出矛盾。

按引理 1，有两条交錯鏈 $\mu_1[\bar{a},y]$ 与 $\mu_2[\bar{a},y]$ 用边 $[a,b]$ 进入 M_1，同时到达 y，且分别終于一条粗边与一条細边；因而 z 将被用边 $[a,b]$ 进入的一条交錯鏈达到，这和 $z\in Z$ 矛盾。

皮特尔逊-格莱 (Petersen-Gallai) **定理** 設 M_1 是由混合点构成的那个子图的一个分图；若 $\bar{a}\notin M_1$，則存在一条且仅一条边内向交于 M_1。若 $\bar{a}\in M_1$，則不存在内向交于 M_1 的边。

1° 若 $\bar{a}\notin M_1$，設 μ 是一条交錯鏈，自 $\bar{a}$ 走入 M_1，且設 b 是 M_1 里第一个被遇到的点，交錯鏈 $\mu[\bar{a},b]$ 用边 $[a,b]$ 进入 M_1，这条边交于 M_1 且是内向的。

設 $[c, d]$ 是异于 $[a, b]$ 的一边，內向交于 M_1。按引理 2，$d\in M_1$ 能被一条用边 $[a, b]$ 进入的交錯鏈达到。按引理 1，可以假定这条鏈終于一边和 $[c, d]$ 属于不同的类型，因而 c 是一个混合点，这和 $c\notin M_1$ 相矛盾。

因此，$[a, b]$ 是內向交于 M_1 的唯一的一边。

2° 若 $\bar{a}\in M_1$，加进两頂 $\bar{a}_0$ 与 $\bar{b}_0$ 及一条粗边 $[\bar{a}_0, \bar{b}_0]$ 和一条細边 $[\bar{b}_0, \bar{a}]$，使問題回到上面那种情况。以 $\bar{a}_0$ 为原点以替代原先的 $\bar{a}$，进入 M_1 唯一的边是 $[\bar{b}_0, \bar{a}]$，因而不存在原图的边进入 M_1。 証毕

这个定理特别指出，若一条交錯鏈穿过 M_1，便决不再与这个分图相遇；以后将見这一特征的应用。

51 具已知次数的部分图的确定

設 $G=(X, U)$ 是一个无向图，且对每一頂点 x，給定一个整数 $f(x)$ 小于或等于次数 $d_x(U)$，現在要求作出一个部分图 (X, W)，其中 x 的次数是 $d_x(W)=f(x)$。若

$$d_x(W)\leqslant f(x) \quad (x\in X),$$

則謂边的集合 $W\subset U$ 和函数 $f(x)$ 是**可并存的**。

对于已給的集合 W，恒称 W 的边是**粗的**，其他的边是**細的**，問題乃归結为寻求一个粗边集合和函数 $f(x)$ 并存，且具最大个数的元素。

这个新問題，和下面曾在第 11 章遇到过的問題呈現某些类似之处：对于一个已知的有向图，寻求一个部分图，具有先已給定的外半次与內半次。然于此将不使用极大流的理論，而引用另一工具，即交錯鏈的理論。

〔注〕 須指出的是，这里所研究的問題，乃一綫性規划。事实上，取 $b_i=f(x_i)$，用 (r_i^j) 記关于边的投射矩陣，求整数 ξ_j，使

$$\begin{cases} 0 \leqslant \xi_j \leqslant 1 & (j=1, 2, \cdots, m), \\ \sum\limits_{j=1}^{m} r_j^i \xi_j \leqslant b_i & (i=1, 2, \cdots, n), \\ \sum\limits_{j=1}^{m} \xi_j \text{ 达到极大。} \end{cases}$$

其中，当边 u_j 是粗的，ξ_j 等于 1，否则 ξ_j 等于 0。

这个綫性規划，須用整数求解，現有的唯一工具是高莫鲵（Gomery）法則，这个法則平常是很少用的。而相反，一个綫性图的法則，异常簡单，用之甚易求出解答。

自 G 出发，将每一**非飽和点** x 和一个原点 $\bar{a}$ 相联，以构造一个多重图 $\overline{G}(\boldsymbol{W})$，所謂非飽和点，即 $d_x(\boldsymbol{W})<f(x)$ 的点 x，联 $\bar{a}$ 与 x，則用 $f(x)-d_x(\boldsymbol{W})$ 条粗边。設在这个图 $\overline{G}(\boldsymbol{W})$ 里，一条交錯鏈自 $\bar{a}$ 出发，而又回到 $\bar{a}$，可将其細边改成粗边，粗边改成細边，以求得一个更大的新的并存集合。我們将見，若一个并存集合 $\boldsymbol{W}$ 已不能再用这个方法予以扩大，这个集合便是极大的。

引理　設 $\mathscr{W}$ 是并存集合 $\boldsymbol{W}$ 的集族，其中每一集合已不再有交錯鏈自 $\bar{a}$ 出发而又回到 $\bar{a}$，則

$$\boldsymbol{W}_1 \subset \boldsymbol{W}_2,\ \boldsymbol{W}_1,\ \boldsymbol{W}_2 \in \mathscr{W} \Rightarrow \boldsymbol{W}_1 = \boldsymbol{W}_2.$$

事实上，若 $\boldsymbol{W}_2 \supset\supset \boldsymbol{W}_1$，則将存在一边 $[x, y] \in \boldsymbol{W}_2 - \boldsymbol{W}_1$，在 $\overline{G}(\boldsymbol{W}_1)$ 里，頂点 x 与 y 显然都是非飽和点，因而 $\bar{a}$ 可用交錯鏈 $[\bar{a}, x]+[x, y]+[y, \bar{a}]$ 相接，这和 $\boldsymbol{W}_1 \in \mathscr{W}$ 相矛盾。

［可注意这个論証在 $x=y$ 时一样有意义。］

貝尔热-諾尔曼-拉宾（Berge-Norman-Rabin）**定理**　并存集合 $\boldsymbol{W}_0$ 是极大的，当且仅当不存在交錯鏈自 $\bar{a}$ 出发而又回到 $\bar{a}$[1]。

欲証这个定理，只須証一个属于上面定义的集族 $\mathscr{W}$ 的并存集 $\boldsymbol{W}_0$ 是极大的。为此，选取一个极大并存集 $\boldsymbol{W}_M$，使 $|\boldsymbol{W}_0 - \boldsymbol{W}_M|$

---

[1] 此处所作甚为一般的叙述，包含貝尔热的一个定理[1]，和諾尔曼-拉宾的一个定理[8]；本处的証明，根据拉宾的想法。

尽可能地小；若 $|W_0-W_M|=0$，则有 $W_0\subset W_M$，按引理，有 $W_0=W_M$，目的便已达到。因此，設 $|W_0-W_M|>0$，茲往証由此将导致矛盾。

1° 在过已知顶点 x 的 G 的边里，W_M-W_0 的边至少应不少于 W_0-W_M 的边。事实上，在相反的情况，将有

$$d_x(W_M)<d_x(W_0)\leqslant f(x).$$

若 $u=[x,y]\in W_0-W_M$，则将存在一边 $v=[y,z]\in W_M-W_0$（因若不然，$W_M\cup[x,y]$ 将是一个并存集合大于 W_M）；$W'=(W_M-\{v\})\cup\{u\}$ 是一个并存集合，盖

$$d_x(W')=d_x(W_M)+1\leqslant f(x),$$

$$d_y(W')=d_y(W_M)\quad\leqslant f(y),$$

$$d_z(W')=d_z(W_M)-1<f(z).$$

因而 W' 是一个极大并存集合（因 $|W'|=|W_M|$），然因

$$|W_0-W'|<|W_0-W_M|,$$

这不可能。

2° 不存在簡单的偶圈，其边相間地在 W_0-W_M 与 W_M-W_0 之内。盖若 μ 是这样的一个圈，集合 $W'=(W_M\cup\mu)-(W_M\cap\mu)$ 将是并存的；因 $|W'|=|W_M|$，W' 是一个极大并存集合，但这不可能，因

$$|W_0-W'|<|W_0-W_M|.$$

3° 設 $\mu=(u_1,u_2,\cdots,u_k)$ 是一个最长的簡单鏈，其边相間地在 W_0-W_M 与 W_M-W_0 之内，并設 x_0 与 x_k 是其端点；首先假定 $x_0\neq x_k$，按1°，两头的两边 u_1 与 u_k 属于 W_M-W_0，由此导出

$$d_{x_0}(W_0)<d_{x_0}(W_M)\leqslant f(x_0),$$

$$d_{x_k}(W_0)<d_{x_k}(W_M)\leqslant f(x_k).$$

因而在 $\bar{G}(W_0)$ 内有一条交錯鏈 $[\bar{a},x_0]+\mu[x_0,x_k]+[x_k,\bar{a}]$，自 $\bar{a}$ 出发而又回到 $\bar{a}$，这是矛盾。

4° 現在假設 $x_0=x_k$，按 2°，两头的两边，不可能属于不同的类型，因而这两边都属于 W_M-W_0，遂有

$$d_{x_0}(W_0)\leqslant d_{x_0}(W_M)-2\leqslant f(x_0)-2.$$

因此，至少将有两条粗边自 $\bar{a}$ 連到 x_0，因而将有一条交錯鏈自 $\bar{a}$ 出发而又回到 $\bar{a}$，这是矛盾。 証毕

确定一个极大幷存集合的法则 尽可能地使更多的边变为粗边，以构造一个幷存集合 W；为了构造一个更大的幷存集合，在 $\bar{G}(W)$ 里寻找是否已不存在自 $\bar{a}$ 出发而又回到 $\bar{a}$ 的交錯鏈。其法如次：自 $\bar{a}$ 出发，沿一条交錯鏈尽量前进，而将所經过的每一步都打上一个箭头，当不能继續前进时，便沿走过的路向回走（抹去箭头），直到分歧路口，再按新的方向前进。

【例1】 在一个仓庫里，其看守計划要求守在走廊 $[x, y]$ 里的每一看守人同时看守两个庫房 x 与 y，这些庫房构成图的端点；若每一庫房至少被一个人看守，問最少要几个看守人？

按諾尔曼 (R. Norman) 的想法，若图 (X, U) 的任一集合 $V\subset U$，能使图的每一頂点至少是 V 的某一边的端点的，命为图的一个**复蓋**，则上面的問題归結为求一个极小复蓋。集合 V 是一个复蓋的必要和充分条件是集合 $W=U-V$ 满足

$$d_x(W)\leqslant d_x(U)-1 \quad (x\in X).$$

按上面的方法，确定一个和这个不等式幷存的极大集合 W，便已求得一个极小复蓋 $V=U-W$。在图 18-2 的图上，极小复蓋共有五条边，因此，五个看守人就够了。

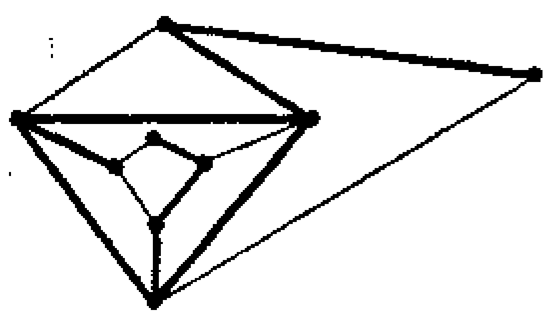


图 18-2

【例2】（洛特，J. P. Roth[7]） 当我們有一个继电系統或任一带控制的机械装置，且能尽量簡单地繪出其图形，使和原物等价时，极小复蓋的确定，便将提到議事日程上来。为了明白起見，現在来研究由三个电鈕 A, B, C 控制的继电器，继电器的情况，用三个变量 ε_A, ε_B, ε_C 来描写：当电鈕 A 一按，

取 $\varepsilon_A=1$；当电鈕 A 一放，取 $\varepsilon_A=0$，等等。对元素为 0 或 1 的向量 $\varepsilon=(\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C)$（即对三維空間 R^3 里单位立方的每个頂点），作一数

$$\varphi(\varepsilon)=\varphi(\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C)$$

与之对应，当电流通过继电器，其值等于 1，在相反情况，其值为 0。現在要找出它的图形，其截电器被电鈕 A, B, C 所控制，其綫路串連或并列，且滿足以下要求：

1° 图形和已給的继电器等价，即：当 $\varphi(\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C)=1$，电流通过，当 $\varphi(\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C)=0$，电流停断；

2° 每一綫路含两个截电器；

3° 綫路的个数尽量地小[1]。

这个問題归結为研究一个图 G，求出其极小复盖，这个图由 $\varphi(\varepsilon)=1$ 的那些頂点所构成，且若这样的两点是单位立方的两个邻点，这两点便相連接（图 18-3）。假定当 $\varepsilon=000, 010, 011, 111, 101, 100$，电流通过；图 G 取边 $(.00)$, (1.1), $(01.)$ 作为极小复盖，遂得欲求的图形（图 18-4）。

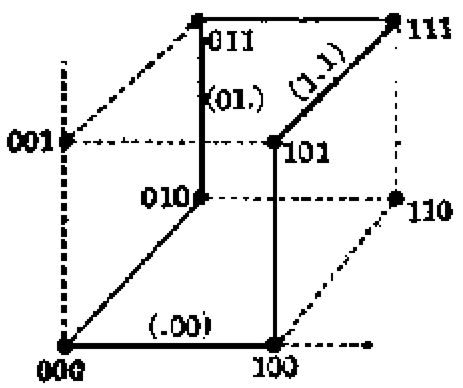


图 18-3

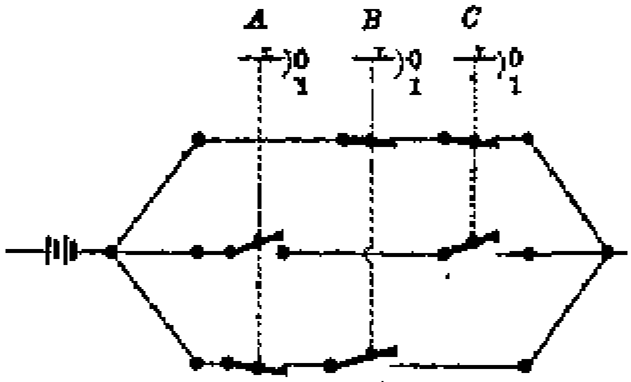


图 18-4

（讀者甚易驗証，在所給的六种情况，电流通过，在其他情况，电流停断。）

52 完 美 对 集

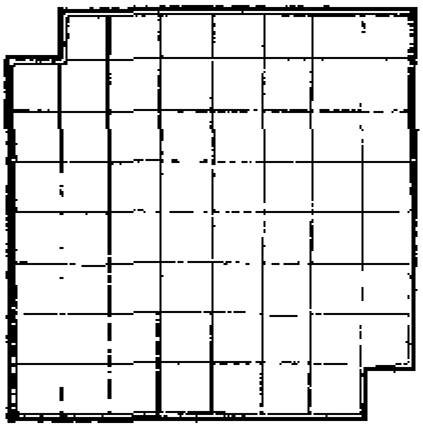
設 $G=(X, U)$ 是一个图，在这个图里，象上面一样，区分粗边与細边，粗边的集合記为 W。若不存在相邻的粗边，则称 W 为**对集**。

---

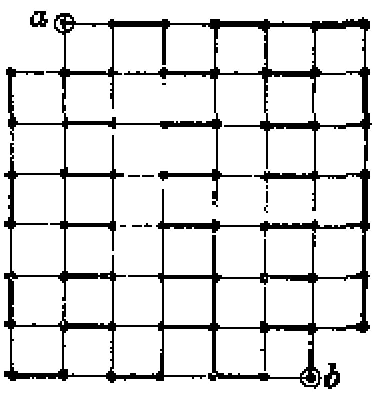
[1] 使用布尔代数的語句，可把这个問題叙述得更为一般；这个問題也称"双五問題"（見[7]）。

若一个頂点不与任何粗边相邻，这点是非飽和的；若不存在非飽和頂点，則謂对集是完美的。

【例1】 剪殘的棋盘問題 研究有 8×8 个方格的棋盘，在一个对角綫的两个頂头，各去掉一格，如图18-5所示（左图）。此外，有31張紙牌，每一張紙牌可以遮盖棋盘的两个相邻方格。問題是：能否用这31張紙牌，将剪殘的棋盘遮盖起来？



剪殘的棋盘



相应图的极大对集

图 18-5

这个問題归結为寻求一个图的极大对集，其頂点是棋盘的方格，对应于每二相邻方格的一对頂点，都用边相联（图18-5的右图）；易見这个对集不是完美的，故剪殘棋盘的遮盖是不可能的。这个論断，同样可用一个簡單的論証来証明，既极漂亮，而又完全不用对集的理論：将棋盘的方格相間地着以白色与黑色（如一般棋盘那样），則剪去的两格恰有相同的顏色；每一張紙牌必然遮盖一个白格和一个黑格，故用31張紙牌的遮盖工作如属可能，則剪殘的棋盘应有31个白格和31个黑格，但这和适所提到的情况矛盾。

【例2】 呂卡斯(Lucas)命为“少女散步”的那个著名問題，可叙述如次：若已知女子学院学生間的关系，問如何組織一次散步，使所有的学生，两个两个一路，而每一学生恰和其最相接近的在一起？在什么样的情况下，問題才是可能的呢？若 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 表示学生，且若学生 x_i 与 x_j 間保有关系，便取 $[x_i, x_j]\in U$，則这个問題归結为图 (X, U) 是否存在一个完美的对集。

設 G 是一个已給的图，W 是由粗边构成的极大对集，象上节一样，定义图 $\overline{G}(W)$，这个图的构成，乃自 G 出发，加进一点 $\overline{a}$，而后自这点用一条粗边联到每一非飽和頂点。

象先前一样，若存在一条交錯鏈 μ，自 $\overline{a}$ 走向一个已知頂点

x，便在 μ 的最后一边上画一箭头指向 x。若 x 是一条有向粗边的終点，而又不是一条有向細边的終点，便命之为粗点，且記 $x\in E$；若 x 是一条有向細边的終点，而又不是有向粗边的終点，命之为一細点，記 $x\in F$；若 x 同时是一条有向細边和一条有向粗边的終点，命之为一**混合**点，記 $x\in M$；最后，若 x 不是任何有向边的終点，則命之为一**不可接近**点，記 $x\in I$。如此一来，每一非飽和点便是粗的或者混合的。在 $\bar{G}(W)$ 里，点 $\bar{a}$ 看作細点；事实上，若 W 是一个极大对集，按貝尔热-諾尔曼-拉宾定理，不可能将 $\bar{a}$ 看作混合点。

定理 2 在 G 里，一个对集是极大的，当且仅当不存在交錯鏈，联接两个相异非飽和顶点。

这个定理可以直接自貝尔热-諾尔曼-拉宾定理推出；以上的条件，表示在图 $\bar{G}(W)$ 里不存在交錯鏈自 $\bar{a}$ 出发而又回到 $\bar{a}$。

定理 3 設 W 是一个极大对集，M_1 是由混合点所成子图的一个分图，則 1° 在图 $\bar{G}(W)$ 里，存在一条粗边内向交于 M_1（专一地），2° 所有交于 M_1 的其他的边都是細的，而且外向（专一地）。

1° 因 $\bar{a}$ 是細点，故 $\bar{a}\notin M_1$，按皮特尔逊-格莱定理，存在一条且仅一条边内向交于 M_1，設这条边是 $[c, x_0]$，其中 $c\notin M_1$，$x_0\in M_1$。

設 $[c, x_0]$ 是一条細边；因 x_0 是混合点，存在一条交錯鏈 μ 自 $\bar{a}$ 走向 x_0，且終于一条粗边；这条鏈 μ 使用边 $[c, x_0]$（它是进入 M_1 的唯一通道），接在这边后面的是一条过 x_0 的粗边，而 μ 又必須終于一条过 x_0 的粗边。然这不可能，因仅能有一条粗边过 x_0。故边 $[c, x_0]$ 应是粗的。

2° 設 $[y, b]$ 是交于 M_1 的另一边，其中 $y\in M_1$，$b\notin M_1$；按皮特尔逊-格莱定理，这条边必然是外向的。此外，这条走出去的边不可能是粗的，蓋 y 既是混合点，必被一条終于粗边的交錯鏈所达到。

推理 1 若 W 是一个极大对集，M_1 是由 M 所成子图的分

图，则 $|M_1|\geqslant 3$，且 $|M_1|$ 是奇的。

事实上，设 $[c,x_0]$ 是交于 M_1 的粗边，而 $x_0\in M_1$，必有 $|M_1|\geqslant 3$，盖若不然，x_0 将不能被一条终于细边的交错链达到。此外，M_1 由 x_0 及若干对用粗边相连的点构成，故 $|M_1|$ 是一个奇数。

推理 2 若 W 是一个极大对集，每一个非混合点而与混合点相邻的必是一个粗点。

事实上，若 $[c,x_0]$ 是交于分图 M_1 的一条粗边，其中 $c\notin M_1$，$x_0\in M_1$，则 $c\notin I$，$c\notin E$，$c\notin M$，故 $c\in F$。

若 $[x,y]$ 是交于 M_1 的一条细边，其中 $x\notin M_1$，$y\in M_1$，同样可见 $x\notin I$，$x\notin E$，$x\notin M$，故 $x\in F$。

推理 3 若 W 是一个极大对集，邻于粗点的每一顶点都是细点。

若 $e\in E$，且 $[x,e]$ 是一条粗边，则 $x\notin I$（因 x 是一条有向边的端点），$x\notin E$（因在相反情况，e 将是混合的），$x\notin M$（由推理 2），故 $x\in F$。

另一方面，若 $[x,e]$ 是一细边，则 $x\notin I$，$x\notin E$，$x\notin M$（由推理 2），故 $x\in F$。

定理 4 若 W 是一个极大对集，I_1 是不可接近点所成子图的一个分图，则所有交于 I_1 的边都是细的，且均无向。每一点 $x\notin I$，但与 I_1 的一点相邻的都是细点。$|I_1|$ 是偶数，且 $|I_1|\geqslant 2$。

1° 若 $[c,x]$ 是交于 I_1 的一边，其中 $x\in I_1$，则 $c\notin M$，$c\notin I$，$c\notin E$（据推理 3），故 $c\in F$，因而边 $[c,x]$ 是细的。

2° I_1 既不含 $\bar{a}$ 也不含非饱和点，I_1 乃由若干对用粗边相联的顶点构成，故 $|I_1|$ 是偶数，且至少等于 2。

定理 5（涂特，Tutte，推广；贝尔热[2]）　已给一个连接图 G 及一个顶点集合 S，用 $p_i(S)$ 表示由 $X-S$ 所成子图里奇阶分图的个数，则在 G 的极大对集里，非饱和顶点的个数是

$$\xi=\max_{S\subset X}\,[p_t(S)-|S|].$$

1° 考察集合 $S\subset X$，并設由 $X-S$ 所成子图的奇阶分图是 $C_1, C_2, \cdots, C_p$。若某一分图 C_k 不含非飽和点，則至少有一条粗边自 C_k 外出（因 $|C_k|$ 是奇数），其另一端是一点 $s_k\in S$；对应于两个不同的分图，有两个不同的頂点 s_k。故若命 n_0 为非飽和点的个数，則

$$p_t(S)-n_0\leqslant(\text{不含非饱和点的 } C_k \text{ 的个数})\leqslant|S|.$$

由此，得

$$p_t(S)-|S|\leqslant n_0\quad(S\subset X).$$

2° 現在来証若集合 S 选得好，恰有 $p_t(S)-|S|=n_0$（于是定理也就証明了）。

設 W 是一个极大对集，F 是細点集合，按定理 3 及推理 1, 2, 3, 有

$$p_t(F)=(\text{分图 } M_1 \text{ 的个数})+|E|.$$

但以集合 F 为一方，以不含非飽和点的分图 M_1 及飽和粗点为另一方，G 的粗边在二者間实建立一个一一对应关系，故有

$$|F|=(\text{分图 } M_1 \text{ 的个数})+|E|-n_0.$$

由此乃得

$$n_0=p_t(F)-|F|.$$

証毕

推理 1 极大对集边的个数恰为

$$\frac{1}{2}(n-\xi),$$

其中

$$\xi=\max_{S\subset X}\,[p_t(S)-|S|].$$

（显然）

推理 2（涂特定理） 一个图具有完美对集的必要和充分条

件是

$$p_i(S) \leqslant |S| \quad (S \subset X).$$

(显然)

若 h 是一个整数，当图的每个顶点都是 h 次时，称这个图是 h **次齐次的**；在图 G 是齐次的这种情况下，定理的叙述将异常簡单。

定理6 若 h 次齐次連接图，不含集合 $S \subset\subset X$，使 $|U_S| < h-1$，则存在完美对集。

事实上，設 S 是 X 的一个子集(在严格的意义下)，并設 C_1 是由 $X-S$ 所成子图的一个分图，而有奇数个元素。按假設 $|U_{C_1}| \geqslant h-1$；但不可能有 $|U_{C_1}| = h-1$，否则，含在 C_1 里边的个数将是

$$\frac{1}{2}[h|C_1| - (h-1)] = \frac{1}{2}[h(|C_1|-1)+1],$$

这不可能是整数(因 $|C_1|$ 是一个奇数)。因有 $|U_{C_1}| \geqslant h$，由此可得

$$h|S| \geqslant |U_S| \geqslant \sum_k |U_{C_k}| \geqslant hp_i(S).$$

于是对于每一 $S \subset\subset X$，$p_i(S) \leqslant |S|$。当 $S = X$，不等式依然有效，故按涂特定理，原图具有完美的对集。

引理(艾尔拉，Errera) 若一个 $h = 2k+1$ 次的奇次齐次图，不含具性质 $|U_S| < 2k$ 的集合 $S \subset\subset X$，且若 W 是一个由粗边构成的极大对集，则每一边 u_0 均属于一个粗細边相間的单純圈。

按定理6，对集 W 是完美的；能証每一細边均在一个交錯圈上即足(盖在此时，粗边 u_0 将在包含其一条相邻細边的交錯圈上)。

于是設 u_0 是一条細边，假定它不属于任一交錯圈；将 u_0 縮成一点 $\bar{a}$，则在所得的图 $\bar{G}$ 里，将不存在自 $\bar{a}$ 出发而又回到 $\bar{a}$ 的交錯鏈，点 $\bar{a}$ 遂是一个細点。

另一方面，按定理3，一个混合点的分图 M_1，具有一条进入的粗边和若干条走出的細边，而这些細边是偶数个的(盖去掉所有粗

边，新图的每个分图，具有尤拉圈）。按假設 $|U_{M_1}|\geqslant 2k$，因而可以說至少有 $2k$ 条細边走出 M_1。

用收縮办法，将每一分图 M_1 縮成一个粗点，所得新图便不再含有用两个方向定向的边。外向过粗点的細边的个数将 $\geqslant 2k$，而內向过細点的細边的个数将 $\leqslant 2k$。将图 $\overline{G}$ 的有向粗边看做其粗点个数 $|E|$ 的函数，然后再看做細点个数 $|F|$ 的函数；便得

$$|F|+1=\text{有向粗边的个数}=|E|.$$

对有向細边作同样处理：

$$2k(|F|-1)\geqslant\text{有向細边个数}\geqslant 2k|E|.$$

遂得

$$\begin{cases}|F|+1=|E|\\|F|-1\geqslant|E|.\end{cases}$$

这两个关系式不能并存，引理得証。

定理 7 若一个 $h=2k+1$ 次的奇次齐次連接图，不包含具性质 $|U_S|<2k$ 的集合 $S\subset\subset X$，則存在用到任給的一边 u_0 的完美对集。

事实上，据定理 6，存在一个完美的对集 W；若边 u_0 是粗的，定理已証。若边 u_0 是細的，可考虑由上面引理所提供的过 u_0 的交錯圈 μ。

将 μ 的粗边改成細边，細边改成粗边，遂得一个新的完美对集包含 u_0。定理得証。

53　在內固数上的应用

对集的理論，为我們提供了一种法則，以构造一个具极大个数元素的內固集 S[1]。

---

[1] 原书在此以后，为了叙述簡便，将“內固”簡为“稳固”，但在中文无此必要，故本节譯文，与原文小有出入。——譯者注

引理1　设 G 是一个图，W 是一个极大对集；若 G 仅有粗点与细点，则所有粗点构成 G 的一个极大内固集。

考察粗点集合 E（包含非饱和点）及細点集合 F. 集合 $C\subset X$，若 G 的每一边至少有一个端点含在 C 内，称 C 是 G 的一个**負荷集**，負荷集的补集是一个内固集，反之亦然。若 W 是一个对集，C 是一个負荷集，恒有

$$|W|\leqslant|C|.$$

故若一个已給的对集 W 和一个已給的負荷集 C，满足 $|W|=|C|$，則对集 W 极大而負荷集 C 极小。在 G 里两个粗点不可能相邻（推理3），故集合 F 是一个負荷集。因 W 是一个极大对集，F 的每一点都是走进 E 的某一粗边的端点，故 $|F|=|W|$，因而 F 是一个极小負荷集。

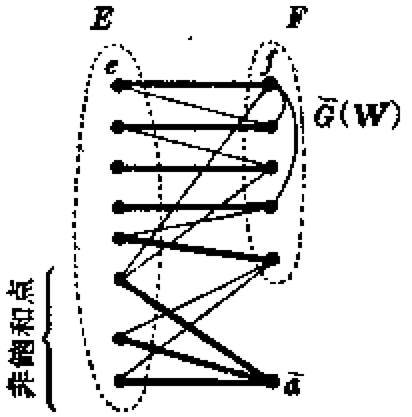


图　18-6

其补集 $E=X-F$ 便是一个极大内固集。

引理2　設 W 是一个只包含粗点与細点的图 G 的极大对集；自 G 出发，去掉一个粗点 e 及过 e 的一切边，以构造图 G'，則 G' 取 $E-\{e\}$ 作为其极大内固集。

事实上，F 是去掉粗点 e 之后所得子图 G' 的一个負荷集；玆往証該集是一个极小負荷集（因如此之后，便已証 $E-\{e\}=X-F$ 是 G' 的一个极大内固集）。

首先設 e 是飽和的，并設 $[e,f]$ 是过 e 的粗边；$W-[e,f]$ 是 G' 的一个对集；但按定理2，它不再是一个极大对集，盖存在一条交錯鏈自原点 $\bar{a}$ 走向非飽和点 f. 故 G' 的一个极大对集 W' 满足 $|W'|=|W|$.

（若点 e 是非飽和的，則 W 仍是极大对集，同样有 $|W'|=|W|$.）

对于对集 W' 和負荷集 F，有 $|W'|=|F|$，故 F 确为 G' 的极小負荷集。即得欲証。

引理 3 設 G 是一个图，而 G' 是由 G 出发增加新边所得到的图，則这种图的内固数满足 $\alpha(G')\leqslant\alpha(G)$。

事实上，設 $\mathscr{S}$ 是 G 的内固集族，$\mathscr{S}'$ 是 G' 的内固集族，应有 $\mathscr{S}'\subset\mathscr{S}$，故

$$\alpha(G')=\operatorname*{Max}_{S\in\mathscr{S}'}|S|\leqslant\operatorname*{Max}_{S\in\mathscr{S}}|S|=\alpha(G).$$

定理 8 (貝尔热[2]) 若 $A\subset X$ 是图 G 顶点的一个集合，用 $S(A)$ 記由 A 所成子图的一个极大内固集；对于一个极大对集 W，用 M_1, M_2, … 記由混合点所成子图的分图，用 I_1, I_2, … 記由不可接近点所成子图的分图，并取

$$S=E\cup S(M_1)\cup S(M_2)\cup\cdots\cup S(I_1)\cup S(I_2)\cup\cdots,$$

若只有 0 个或 1 个混合点的分图，則 S 是 G 的极大内固集。

事实上，每一与粗点相邻的顶点是細的(推理 3)，同样，每一与(未必有的)分图 M_1 相邻(推理 2)，和与一个分图 I_k 相邻(定理 4)的顶点也都如此；故 S 是一个内固集。

另一方面，若将自一个細点联到一个混合点，或一个不可接近点的边都去掉，G 便拆散成分图 $E\cup F$, M_1, I_1, I_2, ….

E 是分图 $E\cup F$ 的一个极大内固集；蓋若在 G 里去掉所有的 I_k，并将分图 $\vec{M_1}$ 縮成一点，新图将仅有細点或粗点，因而可以应用引理 2。如此一来，S 便是不連接图的一个极大内固集。若将去掉的边重新添上，以恢复图 G，内固数应減小(引理 3)；但在 G 里 S 仍保持是内固的，故 S 确是一个极大内固集。

〔注 1〕 若有很多个混合点的分图，又若沒有一个分图 M_j 能被业已經过某一分图 M_k 的交錯鏈所接近，这个定理还是很有价値的。若存在交錯鏈 μ 走出 M_k 进入 M_j，則須看取 μ 的細点替代其粗点之后，是否可能扩大内固集 S。

例如在图18-7的那个图里，存在一个細点在分图 M_1 与 M_2 之間，显見能将这点加到 S 里，以构成一个更大的內固集（这些頂点，在图上被环以小圈）。

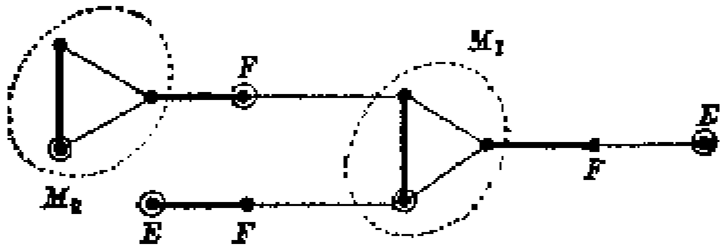


图　18-7

〔注2〕为了在一个分图 M_i 或 I_k 里确定一个极大內固集，只須加进一个明确連接的非飽和点，或去掉一条明确选定的細边，仍能使用定理8及其引理，其作用可于下例見之。

【例1】研究图18-8上带有极大对集 W 的图 G，可証这个图沒有非飽和点，其所有頂点都是可接近的。加进点 e 及一边 $[e, a]$，并取 $Y=X\cup\{e\}$。

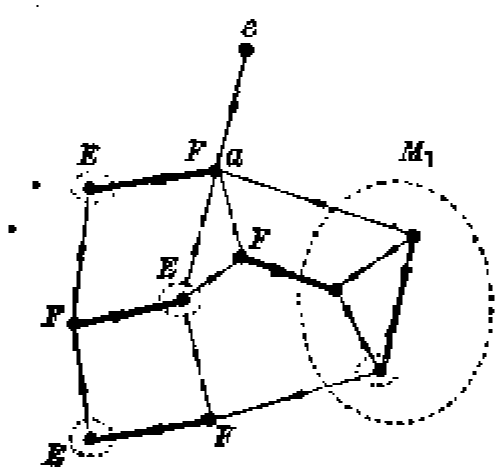


图　18-8

由 $Y-M_1$ 构成的子图，仅有粗点与細点：故这个子图有一个极大內固集，由 e 及三个标以“E”的頂点所构成。按引理2，由 $X-M_1$ 构成的子图，乃有一个极大內固集，由三个标以“E”的頂点构成。因而由分图 $X-M_1$ 与 M_1 所构成的不連接图，取四个加圈的頂点，作为极大內固集。由引理3，对于图 G 有同样的結果。

第19章 半 因 子

54 哈密尔頓圈与半因子

在有限图G里，一条**哈密尔頓鏈**乃仅遇每一顶点一次的鏈；一个**哈密尔頓圈**，乃仅遇每一顶点一次的圈（起点除外，起点和終点总相合）。

可注意的，若将每一边按其两个方向来定向，使G成为一个对称图，则每一哈密尔頓鏈确定一条哈密尔頓路，反之亦然；每一哈密尔頓圈确定一条哈密尔頓回路，反之亦然。确定一条哈密尔頓鏈或一个哈密尔頓圈的問題，前已加以研究（第11章），这里就不再重复。然若在一个图$G=(X, U)$里，寻求一个**半因子**，即謂寻求一个部分图(X, V)，其所有的顶点都是二次的（这个部分图乃由一个或几个不相交的圈所构成），我們便遇到了一种新的問題。一个具有因子的对称图，可能根本沒有半因子。看图19-1里那个图，便足以証实这一論断：繪以粗綫的那些弧，构成一个因子，但这个图确无半因子。

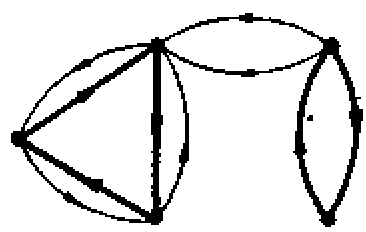


图 19-1

半因子的寻求，将如第18章所指出的那样，在于考察两个非飽和点間粗边与細边所組成的交錯鏈；我們将仅限于建立一种判断，来直接識别是否存在一个半因子。我們也将对不相交半因子的极大个数，进行确定，所謂不相交半因子，即从一个已給的图所能提出的无公共边的半因子。首先研究h次齐次图。

【例1】（契尔克曼，Kirkman） 十一个閣員，每天圍一圓桌开会：如何安排这些閣員的座位，使在每次会議中，每个閣員都和不同的人邻坐？問这样

的安排可持續多少天?

这个問題归結为，在一个具十一个頂点：$a, b, c, \cdots, i, j, k$ 的完备图里，寻求互不相交的哈密尔頓圈的极大个数。于此，易見仅有五个不相交的圈：

$a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,i\,j\,k\,a,$

$a\,c\,e\,b\,g\,d\,i\,f\,k\,h\,j\,a,$

$a\,e\,g\,c\,i\,b\,k\,d\,j\,f\,h\,a,$

$a\,g\,i\,e\,k\,c\,j\,b\,h\,d\,f\,a,$

$a\,i\,k\,g\,j\,e\,h\,c\,f\,b\,d\,a.$

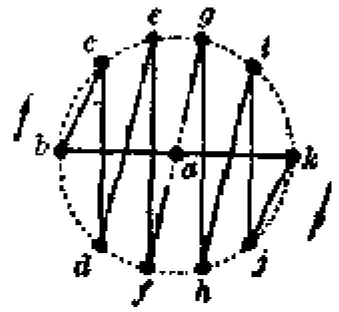


图　19-2

将图19-2上所画的图(按箭头方向)作所标距离的旋轉，便得这些圈。一般，具 $2n+1$ 个頂点的，可求得 n 个互不相交的哈密尔頓圈。

【例2】(呂卡斯，Lucas)　記以 a, b, c, d, e, f 的六个男孩，和記以 $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}$ 的六个女孩，手牵手跳圓圈舞。若使每一男孩仅和每一女孩相邻一次，但决不和其他男孩相邻，問应如何构成这些圓圈?

这个問題归結为寻求一个十二頂点二色图互不相交哈密尔頓圈的极大个数。共有三个互不相交的圈：

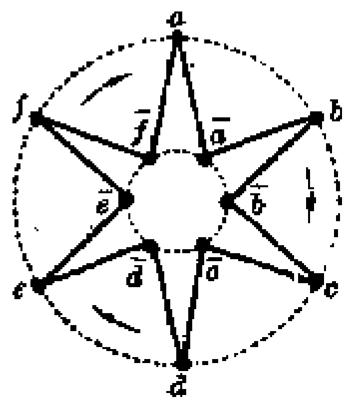


图　19-3

$a\,\bar{a}\,b\,\bar{b}\,c\,\bar{c}\,d\,\bar{d}\,e\,\bar{e}\,f\,\bar{f}\,a,$

$a\,\bar{c}\,b\,\bar{d}\,c\,\bar{e}\,d\,\bar{f}\,e\,\bar{a}\,f\,\bar{b}\,a,$

$a\,\bar{e}\,b\,\bar{f}\,c\,\bar{a}\,d\,\bar{b}\,e\,\bar{c}\,f\,\bar{d}\,a.$

这些圈的获得，乃由于按距离旋轉图19-3的那个星形图，而固定外圓上的字母不动；何以不能找出更多的互不相交的哈密尔頓圈，以及同样地何以不能找出更多的互不相交的牛因子，以后将給以理論証明。

【例3】(希尔伯特，Hilbert)　考虑正整数 p_{ij}，其中 $i\leqslant n,\ j\leqslant n,\ i<j$，并构造 n 个复变数的函数：

$$f(z_1, z_2, \cdots, z_n)=\prod_{i<j\leqslant n}(z_i-z_j)^{p_{ij}}.$$

在其不变式理論中，希尔伯特希望将 f 分解成原項的乘积，即分解成可以写成下形：

$$(z_1-z_{i_1})(z_2-z_{i_2})\cdots(z_n-z_{i_n})$$

的諸項的乘积，其中$(i_1, i_2, \cdots, i_n)$是$(1, 2, \cdots, n)$的某一排列。为了考察这样的分解是否可能，可取 n 个頂点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，并用 p_{ij} 条$(i<j)$不同的边連接二頂 x_i 与 x_j，以构造一个多重图 G，这个問題便归結为将 G 分解成互不相交的半因子。

定理 1（皮特尔逊，Petersen） 一个 $h=2k$ 次的偶次齐次图，可以分解成 k 个互不相交的半因子。

事实上，可以假定这个图是連接的（否則可以分别考虑每一分图）；按第 17 章定理 1，这个图有一个尤拉圈，将每一边按行进的方向給以定向，便得一个拟对称图 G'，其每一頂点具有等于 k 的内半次与外半次。按第 11 章定理 2 的推理，可将 G' 分解成 k 个因子，这些便是原图的半因子。

定理 2（貝布累，F. Baebler） 一个 $h=2k+1$ 次的奇次齐次图，在

$$\min_{\substack{S \neq X \\ S \neq \varnothing}} |U_S| \geqslant 2k$$

的情况下包含 k 个互不相交的半因子。

这个条件充分而不必要[1]。

事实上，在这样的情况下，这个图有一个完美的对集（第 18 章定理 6）。不属于对集的边，构成一个 $2k$ 次的齐次部分图，按定理 1 这个部分图可以分解成 k 个互不相交的半因子。定理得証。

【例 4】 将 $2k+2$ 个小孩，排成圓圈，使每一小孩，在每次排列中都沒有相同的邻孩，問共可排成多少圓圈？这个問題归結为在一个 $2k+1$ 次齐次的完备图里，寻求互不相交的半因子的个数，因此处 $|U_S| \geqslant 2k$，共有 k 个可能的圓圈。

---

(1) 貝布累已将这个論断加以推广[1]，已証明：$h=2k+1$ 次的奇次齐次图，在

$$\min_{\substack{S \neq X \\ S \neq \varnothing}} |U_S| \geqslant 2q$$

的情况下，包含 q 个互不相交的半因子（其中 $q \leqslant k$）。

以下将对三次齐次图的半因子予以特别注意(因为这些半因子,在"四色問題"里起特殊作用)。首先,应指出三次齐次的无环图 G 是四色的;盖象对称图一样,G 有一个格隆地函数 $g(x)$,且

$$\max g(x) \leqslant \max |\Gamma x| = 3.$$

第4章定理4指出色数是 $\gamma(G)=3+1=4$ (至多)。

现在,关于图的色級,我們可以說些什么呢?其答案与半因子的存在有密切关系。每当 G 有一个半因子 $\boldsymbol{V}$, G 便有一个完美对集 $\boldsymbol{W}=\boldsymbol{U}-\boldsymbol{V}$(反之亦然);因此,将 $\boldsymbol{V}$ 的边看作細边,$\boldsymbol{W}$ 的边看作粗边。联接图的某一边,当将其去掉之后,便产生两个分图(每一分图至少各有一边)的,叫做这个图的**地峽边**。

定理3　一个三次齐次且无地峽边的图 G,1° 其边可以分为一个半因子 $\boldsymbol{V}$ 及一个完美对集 $\boldsymbol{W}$;2° 过每一边 u_0 恒有一个偶次交錯圈(其边相間地在 $\boldsymbol{V}$ 与 $\boldsymbol{W}$ 之内)。

定理的第一部分可直接由定理2推得;第二部分則可由第18章的艾尔拉引理推得。

2° 的直接推导(作为参考)。

首先考虑一条細边 $u_0=[x_0, y_0]\in \boldsymbol{V}$,自 G 出发,在边 $[x_0, y_0]$ 的中間,作一頂点 a_0,并自該点到原点 $\bar{a}$ 作一粗边,以作出新图 $\bar{G}$.若将新边按自 $\bar{a}$ 出发的交錯鏈来定向,則点 a_0 便如图19-4所表示的那样形式(因按假設,u_0 不屬

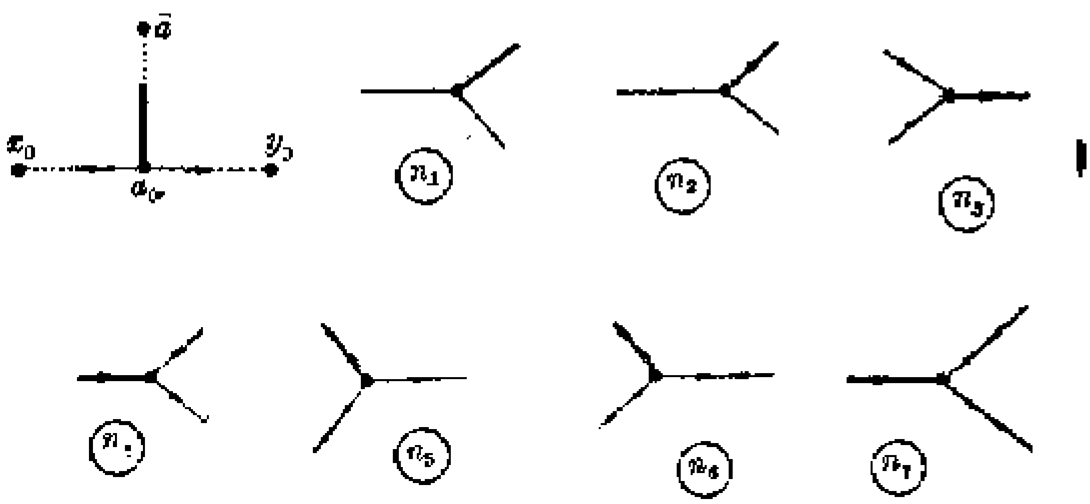


图 19-4

于一个偶次的交错圈)。G 的顶点，分属于图 19-4 上所画出的七种类型；用 n_k 記第 k 种类型顶点的个数，按第 18 章定理 3，n_7 等于混合点的分图 M_1 的个数；因图里沒有地峽边，每一分图 M_1 至少有一出边。交于 M_1 的細边，其个数是一偶数(因沿一条細边走进 M_1，且仅沿未曾走过的細边行进时，終將沿一条細边走出 M_1)。故分图 M_1 的个数 n_7 滿足

(1) $$2n_7 \leqslant n_5.$$

計算仅按一个方向定向的 $\overline{G}$ 的細边的个数，有

(2) $$n_2+2n_3=2n_4+n_5+2.$$

計算仅按一个方向定向的 $\overline{G}$ 的粗边的个数，有

(3) $$1+n_2+n_3=1+n_4+n_7.$$

將(1)与(2)乘以 -1，和(3)(乘以 $+2$)相加，得 $n_2 \leqslant -2$，遂得矛盾。

一条粗边 u_1 必属于一个交錯圈，盖按 (1°)，过 u_1 的一条邻边有一交錯圈(这个圈用到边 u_1)。

推理 若 G 是一个三次齐次且无地峽边的图，則：1°存在一个完美的对集，包含任給的一条边；2°存在一个半因子，包含任給的两条边。

1° 若 u_0 是关于某一完美对集 W 的一条細边，考察过 u_0 的交錯圈 μ；$W'=(W-\mu)\cup(\mu-W)$ 便是一个完美对集，包含 u_0。

2° 考察任給的两边 u_1 与 u_2，且自 G 出发，在 u_1 的中間加进一点 a_1，在 u_2 的中間加进一点 a_2，联 a_1, a_2 以边 u_0，以作出图 G'，G' 是一个三次齐次无地峽边的图，故存在一个完美对集，包含 u_0。所有的細边遂构成一个半因子，包含 u_1 与 u_2。

定理 4 (皮特尔逊-艾尔拉) 在一个三次齐次图里，若所有的地峽边属于同一条初級鏈，則存在一个半因子。

事实上，去掉所有的地峽边，便得許多互不相交的分图 C, D, …等，集合 U_C, U_D, … 等各由 G 的一条地峽边或两条地峽边所构成。

設 U_C 由两条地峽边 v 与 w 所构成，現在来研究由 C 构成的子图，將与 v 相邻的两边，去掉其接触点，且將其焊接为一条

边；对于与 w 相邻的两边，作同样处理。新图便是三次齐次的，按前一推理，可作一个半因子，包含所焊接的两边。照样对每一分图 C, D, … 作一半因子，由此便得 G 的一个半因子。

定理 5 一个三次齐次图，其色級 $\leqslant 5$；若該图沒有地峽边，或其所有地峽边均在同一初級鏈上，則其色級 $\leqslant 4$；若存在一条哈密尔頓圈，則其色級 $\leqslant 3$.

事实上，考察一个三次齐次图，及其一个极大对集，而将这个极大对集，染以第一种顏色。若存在非飽和点，便用第二种顏色涂染每一非飽和点上的任一边。于是仅余不相交的初級圈与初級鏈須涂以顏色，显見三种顏色即能完成任务。

若所有的地峽边在同一条鏈上，将不存在非飽和点，按上面的結果，四种顏色也就够了。

若存在一个哈密尔頓圈，其長应是偶数(因共有 $3n/2$ 条边，故 n 必是偶数)，两种顏色足以涂染这个哈密尔頓圈，三种顏色即足以涂染图的一切边。

須注意的是，所有三次齐次图，虽不含地峽边，也不总有哈密尔頓圈：例如图 19-5 的那个图(这个图色級为 3)。

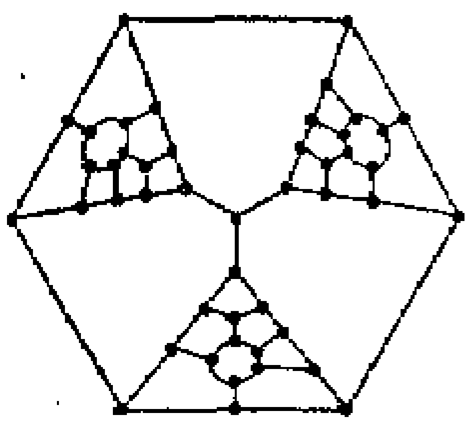


图 19-5

推理(史密斯，C. A. B. Smith) 在一三次齐次图里，自任給的一边开始的哈密尔頓圈，共有偶数个。

若根本不存在哈密尔頓圈，定理已証；假使存在，則图是 3 色級的，且无地峽边。

現在我們一方面来考虑所有可能的着色方法 π 的集合(即謂：将 U 分成三个不相邻的弧的集合的方法)，另一方面考虑沒有奇数長的圈的半因子 μ 的集合，对应于每一着色方法 π，有三个两色的

半因子 $\mu_1(\pi)$, $\mu_2(\pi)$ 与 $\mu_3(\pi)$, 且

$$(1) \qquad \mu_1(\pi)+\mu_2(\pi)+\mu_3(\pi)\equiv 0 \pmod 2.$$

反之, 对应于具有 k_μ 个偶数长互不相交的初級圈的半因子 μ, 可能作出 $2^{k_\mu-1}$ 种不同的着色方法 π, 将等式(1)对所有这些着色方法 π 求和,有

$$\sum_{\mu} 2^{k_\mu-1}\mu\equiv 0 \pmod 2.$$

由此,有

$$\sum_{\mu/k_\mu=1}\mu\equiv 0 \pmod 2.$$

遂得欲証。

55 半因子存在的必要和充分条件

在上一节里,已用一种簡单方式,形成了半因子存在的充分条件;現在来寻找一种更强的条件。

設 G 是要在其内寻找半因子的图,而 $\overline{G}$ 是自 G 出发,按下列方式构造出来的图: G 的每一頂点 x, 譬如在該点上有 $U_x=\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$, 代以 k 个元素与 $k-2$ 个元素的两个集合:

$$\overline{X}(x)=\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_k\},$$
$$\overline{Y}(x)=\{\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_{k-2}\}.$$

每一 $\bar{x}_i$ 到每一 $\bar{y}_j$ 联以一边, 且对应于每一边 $u_j=[x, x']$ 作一边 $\bar{u}_j$ 联接 $\bar{x}_j\in\overline{X}(x)$ 与 $\bar{x}'\in\overline{X}(x')$ (見图 19-6)。

图 $\overline{G}$ 的每一完美对集,在 G 内确定一个半因子;反之,G 的每一半因子, 在 $\overline{G}$ 里确定一个完美对集。因此, 我們便回到一个熟悉的問題:判断图 $\overline{G}$ 是否具有完美的对集。

除去 G 具有一次頂点的这种情况, 因在此时根本不存在半因子;同样, 除去 G 有二次頂点的情况, 因在此时, 可以消去这种頂点(将过該点的两边焊接起来)。換言之, 即对每一頂点 $x\in X$, 恒有

$$|\bar{Y}(x)|\neq\varnothing.$$

引理 用 $\bar{X}$ 記 $\bar{G}$ 的顶点集合，用 $p_i(\bar{S})$ 記 $\bar{X}-\bar{S}$ 所成子图里奇阶分图的个数；则存在集合 $\bar{S}$，满足：

(0) $p_i(\bar{S})-|\bar{S}|=\max\limits_{\bar{E}\subset\bar{X}}(p_i(\bar{E})-|\bar{E}|)$.

(1) $\bar{X}(a)\cap\bar{S}\neq\varnothing\Rightarrow\bar{X}(a)\subset\bar{S}$,

(2) $\bar{Y}(b)\cap\bar{S}\neq\varnothing\Rightarrow\bar{Y}(b)\subset\bar{S}$,

(3) $\{a/\bar{X}(a)\subset\bar{S}\}$ 与 $\{b/\bar{Y}(b)\subset\bar{S}\}$ 互不相交。

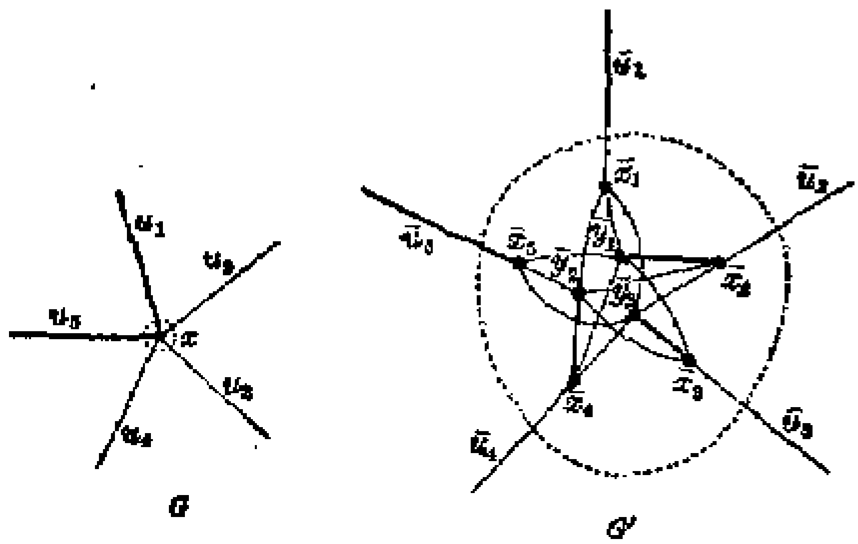


图 19-6

茲往証在满足(0)的諸 $\bar{S}$ 中，其 $|\bar{S}|$ 极小的也满足 (1)，(2)，(3)。

有(1)：設对某一 $a\in X$，有 $\bar{X}(a)\not\subset\bar{S}$，$\bar{X}(a)\cap\bar{S}\neq\varnothing$，考虑一点 $\bar{x}_0\in\bar{X}(a)\cap\bar{S}$；取 $\bar{S}_0=\bar{S}-\{\bar{x}_0\}$。

若 $\bar{Y}(a)\subset\bar{S}$，则

$$p_i(\bar{S}_0)\geqslant p_i(\bar{S}).$$

另一方面，若 $\bar{Y}(a)\not\subset\bar{S}$，将有 $p_i(\bar{S}_0)=p_i(\bar{S})-1$，或 $p_i(\bar{S}_0)=p_i(\bar{S})$，視 $\bar{x}_0$ 是否連接由 $\bar{X}-\bar{S}$ 所成子图的两个互不相交的分图而定。故最后有

$$p_i(\bar{S}_0)\geqslant p_i(\bar{S})-1,$$

$$|\bar{S}_0|=|\bar{S}|-1,$$

由此，导致

$$p_t(\bar{S}_0)-|\bar{S}_0|\geqslant p_t(\bar{S})-1-|\bar{S}|+1=\max_{\bar{E}}(p_t(\bar{E})-|\bar{E}|).$$

但这和 $|\bar{S}_0|<|\bar{S}|$ 相違。

有 2: 設对某一 $b\in X$，有 $\bar{Y}(b)\cap\bar{S}\neq\varnothing$ 与 $\bar{Y}(b)\not\subset\bar{S}$，考虑集合 $\bar{T}=\bar{S}-(\bar{Y}(b)\cap\bar{S})$；有

$$|\bar{T}|<|\bar{S}|.$$

若 $\bar{X}(b)\subset\bar{S}$，有

$$p_t(\bar{T})>p_t(\bar{S}).$$

若 $\bar{X}(b)\not\subset\bar{S}$，有

$$p_t(\bar{T})=p_t(\bar{S}).$$

故在所有的情况，$p_t(\bar{T})\geqslant p_t(\bar{S})$，且

$$p_t(\bar{T})-|\bar{T}|\geqslant p_t(\bar{S})-|\bar{S}|+1>\max_{E\subset X}(p_t(\bar{E})-|\bar{E}|).$$

引出矛盾。

有(3)：假設对某一 $a\in X$，有 $\bar{X}(a)\subset\bar{S}$，$\bar{Y}(a)\subset\bar{S}$；設 $\bar{y}_0\in\bar{Y}(a)$，并取 $\bar{T}=\bar{S}-\{\bar{y}_0\}$。則有

$$p_t(\bar{T})=p_t(\bar{S})+1,$$

$$|\bar{T}|=|\bar{S}|-1.$$

由此，

$$p_t(\bar{T})-|\bar{T}|=p_t(\bar{S})-|\bar{S}|+2>\max_{E\subset X}(p_t(\bar{E})-|\bar{E}|).$$

引出矛盾。

涂特定理 在一个图 G 里，若 A 与 B 是两个互不相交的頂点集合，用 $m(A, B)$ 記連接 A 与 B 的边的条数，用 $q(A, B)$ 記 $X-A$ 所成子图里 $m(C, B)$ 为奇数的那些分图 C 的个数。G 具半因子的必要和充分条件是每一頂点 x 的次数 $d(x)\geqslant 2$，且对每一对互不相交的集合 A 与 B，有

$$q(A, B)-\sum_{b\in B}d(b)-2|A|+2|B|\leqslant 0.$$

据第 18 章定理 5，欲求的条件，乃对以上所定义的图 $\bar{G}$ 有

$$\max_{\bar S\subset\bar X}(p_i(\bar S)-|\bar S|)=0.$$

按引理，只须考虑满足 (1)，(2)，(3) 的集合 $\bar S$. 考虑这样一个 $\bar S$，且取

$$A=\{a/\bar X(a)\subset\bar S\},$$
$$B=\{b/\bar Y(b)\subset\bar S\}.$$

A 与 B 是互不相交的，且

$$|\bar S|=\sum_{a\in A}d(a)+\sum_{b\in B}(d(b)-2)=\sum_{a\in A}d(a)+\sum_{b\in B}d(b)-2|B|.$$

现在来計算 $p_i(\bar S)$；和 $\bar Y(A)$ 相遇的分图 $\bar C$ 形如 $\bar C=\{\bar y\}$，其中 $\bar{\tilde y}\in\bar Y(a)$，$a\in A$，故恰有

$$\sum_{a\in A}(d(a)-2)=\sum_{a\in A}d(a)-2|A|$$

个。

若 $\bar C$ 是不与 $\bar Y(A)$ 相遇的分图，取

$$C=\{x/\bar X(x)\cap\bar C\neq\varnothing\},$$

则 $C\cap A=\varnothing$，且 $m(C,B)$ 与 $|\bar C|$ 有相同的奇偶性。奇阶且与 $\bar Y(A)$ 互不相交的分图 $\bar C$ 的个数遂为 $q(A,B)$，由此引出

$$p_i(\bar S)=q(A,B)+\sum_{a\in A}d(a)-2|A|.$$

欲求的条件遂为

$$0=\max_{\bar S}(p_i(\bar S)-|\bar S|)$$
$$=\max_{A,B}[q(A,B)-2|A|+2|B|-\sum_{b\in B}d(b)],$$

即得欲証。

显見使用一种极其相似的方法，可以获得具已給次数的部分图的存在条件[1]。

[1] 涂特所給的这个条件，在实际应用上可惜过于复杂：設 $f(x)$ 是顶点 x 所能获得的次数，$d_A(x)$ 是 x 在 $X-A$ 所成子图里的次数；涂特的条件是：

(1) $$d(x)\geqslant f(x)\quad(x\in X),$$

(2) $$\sum_{x\in A}f(x)\geqslant q(A,B)+\sum_{x\in B}[f(x)-d_A(x)],\ (A,B,A\cap B=\varnothing).$$

[illegible]，用同样的方法，可得和 $f(x)$ 并存的极大集合 W 的次数。

第20章 图的連接性

56 断　　点

在一个連接图(X, U)里，一点x，将其去掉之后，所得子图便已不再連接，这样的頂点x称为**断点**；若更特殊一些，頂点x和所得子图的每个分图原只用一条边相联，則x称为**簡单断点**。

【例1】 在一个树里，所有非悬挂頂点都是断点。相反，有哈密尔頓圈的图，便根本沒有断点。

【例2】（运输网絡） 設X是属于某一組織的成員的集合，若成員x与成員y可以互相溝通，便取$[x, y]\in U$。断点乃那些具有重要意义的联系人員，这些人員的丧失，将破坏組織的統一与团結。

定理1 在一个連接图里，頂点x_0是一个断点，当且仅当存在两个頂点a与b，所有連接a与b的鏈都經过x_0。

1° 若由$X-\{x_0\}$所成的子图不連接，則这个子图至少有两个分图C与C'；取C的任一頂点作为a，取C'的任一頂点作为b：在原先連接的那个图里，每一联接a与b的鏈自然非經过x_0不可。

2° 若所有联接两个頂点a与b的鏈都經过x_0，則由$X-\{x_0\}$构成的子图将不連接，故x_0是一断点。

断点概念，和类似于第12章研究过的那些概念的另一些概念，有密切联系。在一个連接图G里，自x走向y最短一条鏈的长度$d(x, y)$叫做二頂x与y間的**距离**，数

$$d(x)=\max_{y\in X} d(x, y)$$

叫做頂点x的**遙距**。

具极小遙距的頂点称为**中心**，而具极大遙距的頂点則称为**半**

周点。在一个对称图里，此二概念分别与中心和周点相合。取

$$\rho=\min_{x\in X} d(x) \quad (\text{半离径}).$$

若 $A\subset X$，取

$$d_A(x_0)=\max_{y\in A} d(x_0, y) \quad (\text{关于 } A \text{ 的遥距}).$$

定理 2（約丹，C. Jordan） 若连接图 G 取简单断点 x_0 作为其一个半心，则 G 的半心将是唯一的一个顶点或相邻的两个顶点。

1° 在由 $X-\{x_0\}$ 构成的子图里，至少存在一个分图 A，其

$$d_A(x_0)=\rho.$$

但另一方面，也将存在一个分图 B，其

$$B\neq A; \quad d_B(x_0)=\rho \text{ 或 } \rho-1.$$

事实上，若对每一 $B\neq A$，有 $d_B(x_0)<\rho-1$，则与 x_0 相邻且属于 A 的顶点 a 将满足

$$d(a)=\rho-1<\rho=\min_{x\in X} d(x),$$

引出矛盾。

2° 設 x_1 是某一半心 $\neq x_0$（假使存在的話），且設 C_1 是 $X-\{x_0\}$ 所成子图包含 x_1 的那个分图。则不存在分图 $C\neq C_1$，其 $d_C(x_0)=\rho$；盖若这样的分图存在，且若 c 表示 C 里去 x_0 最为遥远的一项，则

$$d(x_1)\geqslant d(x_1, c)=d(x_1, x_0)+d(x_0, c)\geqslant 1+\rho,$$

但 x_1 是一半心，遂得矛盾。

3° 由此可以推出 $C_1=A$ 及 1° 里确定的分图 B 满足 $d_B(x_0)=\rho-1$；于是 x_1 就是和 x_0 相邻且属于 A 的那个顶点 a。盖若不然，用 b 記 B 里去 x_0 最远的顶点，则

$$d(x_1)\geqslant d(x_1, b)=d(x_1, x_0)+d(x_0, b)\geqslant 2+(\rho-1)=\rho+1,$$

（但 x_1 是一半心，遂得矛盾。）

推理 一个树或者仅具一个半心，或者仅具相邻的两个半心。

事实上，一个树的每一半心，也是一个简单断点。

定理 3 半周点决不能是一个断点。

事实上，設 z_0 是一个半周点，考察一个具性质

$$d(z_0, z)=\max_{x, y\in X} d(x, y)$$

的点 z。

若 z_0 是一断点，由 $X-\{z_0\}$ 所成的子图，有許多分图；若 x 是不含 z 的某一分图的点，則

$$d(x, z)=d(x, z_0)+d(z_0, z)>\max_{x, y} d(x, y).$$

这是矛盾。

57 不可断图

一个图 G，若是連接的，且沒有断点，叫做**不可断的**。这种不可断图的主要特征是一些精致的定理，讀者在第一次接触这些定理时，可以略去証明不讀。

蒙格尔(Menger)定理(由第拉克，Dirac 加以补充[1]) 在一个不可断图 G 里，对每一联接二相异頂点 a_0 与 a_k 的初級鏈 $\mu=[a_0, a_1, \cdots, a_k]$，可作两个具下述性质的初級鏈 μ' 与 μ'' 与之相应：

(1) μ' 与 μ'' 以 a_0 与 a_k 为其端点；

(2) μ' 与 μ'' 除 a_0 与 a_k 外，无其他共同頂点；

(3) 沿 μ' (或 μ'') 自 a_0 走向 a_k，所遇到的 μ 的頂点，其指标逐渐上升。

对于长度为 1 的鏈 $\mu=[a_0, a_1]$，这个定理为真，蓋若 a_0 不是一个断点，則存在一条鏈 μ' 自 a_0 走向 a_1，不使用边 $[a_0, a_1]$，取 $\mu''=[a_0, a_1]$，定理的条件确能滿足。

假設定理对于一条长度为 k 的初級鏈 μ 为真，現在来由此推

出对一条长度为 $k+1$ 的初級鏈

$$\mu=[a_0, a_1, \cdots, a_k, a_{k+1}]$$

定理亦眞。

用 μ' 与 μ'' 記联接 a_0 与 a_k 满足(1)，(2)，(3) 的两条互不相交的鏈；問題是要証明在 a_0 与 a_{k+1} 之間存在两条鏈 μ_0' 与 μ_0''，具相同性质。

联 a_0 与 a_{k+1}，存在一条初級鏈 $\nu=\nu[a_0, a_{k+1}]$，不过 a_k（盖若不然，按定理 1 a_k 将是一个断点）。用 x 記与 a_{k+1} 最近而又在 $\mu[a_0, a_k]+\mu'[a_0, a_k]+\mu''[a_0, a_k]$ 上的 ν 的頂点。若干情况将加以考察：

第一种情况：$x=a_0$。欲求的二鏈即

$$\mu_0'=\mu,$$
$$\mu_0''=\nu.$$

第二种情况：$x=a_{k+1}$。因 $x\notin\mu[a_0, a_k]$，故 $x\in\mu'$ 或 $x\in\mu''$；譬若 $x\in\mu'$，可取

$$\mu_0'=\mu'[a_0, x],$$
$$\mu_0''=\mu''[a_0, a_k]+[a_k, a_{k+1}].$$

第三种情况：$x\notin\mu$。在这种情况，将有 $x\in\mu'$ 或 $x\in\mu''$；譬若 $x\in\mu''$，取

$$\mu_0'=\mu'[a_0, a_k]+[a_k, a_{k+1}],$$
$$\mu_0''=\mu''[a_0, x]+\nu[x, a_{k+1}].$$

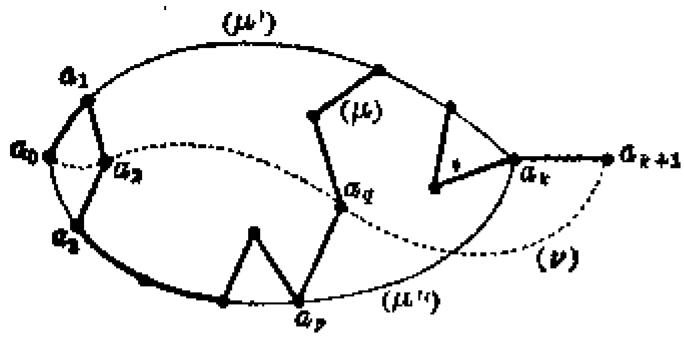


圖 20-1

第四种情况：$x\in\mu$, $x\neq a_0$, $x\neq a_{k+1}$。此时可书 $x=a_q$, 其中 $q<k$；設 a_p 为 μ 的頂点，与 a_q 最近，且也属于 $\mu'+\mu''$，其中 $p\leqslant q$；譬若 $a_p\in\mu''$（参看图 20-1），取

$$\mu_0'=\mu'[a_0,\ a_k]+[a_k,\ a_{k+1}],$$

$$\mu_0''=\mu''[a_0,\ a_p]+\mu[a_p,\ a_q]+\nu[a_p,\ a_{k+1}].$$

这四种情况概括了所有可能的状态，故定理得証。

引理 在一个无环的連接图里，对应于任意二边 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$，恒可作一初級鏈，起于 $\boldsymbol{u}$ 而終于 $\boldsymbol{v}$。

事实上，若 $\boldsymbol{u}=[a,\ x]$, $\boldsymbol{v}=[b,\ y]$，则因图是連接的，可用一条初級鏈 $\mu=[a,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k=b]$ 联接頂点 a 与 b。

若 $x\notin\mu$, $y\notin\mu$，欲求的鏈便是

$$\mu_0=[x,\ a]+\mu+[b,\ y].$$

若 $x\notin\mu$, $y\in\mu$，欲求的鏈是

$$\mu_0=[x,\ a]+\mu\ [a,\ y]+[y,\ b].$$

若 $x\in\mu$, $y\notin\mu$，欲求的鏈是

$$\mu_0=[a,\ x]+\mu[x,\ b]+[b,\ y].$$

若 $x\in\mu$, $y\in\mu$，欲求的鏈是

$$\mu_0=[a,\ x]+\mu[x,\ y]+[y,\ b].$$

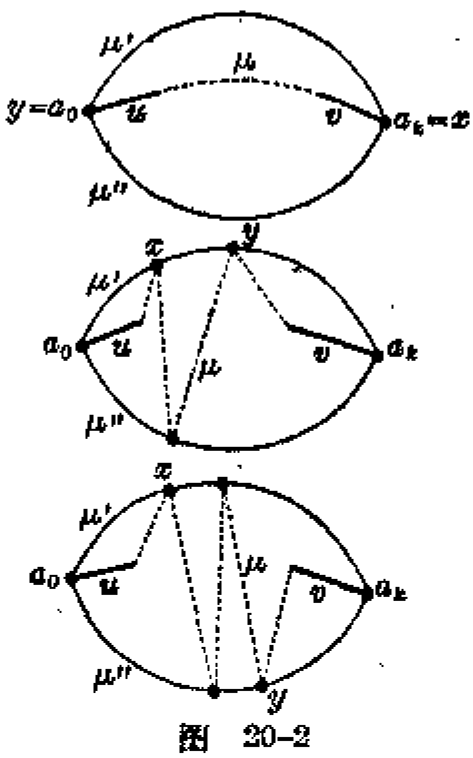


图 20-2

定理 4 在一个无环不可断图里，对于任意两边 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$，恒存在一个初級圈，过 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$。

事实上，設 $\mu=[a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_k]$ 是一条初級鏈，其

$$[a_0,\ a_1]=\boldsymbol{u},\ [a_{k-1},\ a_k]=\boldsymbol{v};$$

按引理这样一条鏈是存在的。考察联接 a_0 与 a_k 且满足蒙格尔定理的条件的两条互不相交的初級鏈 μ' 与 μ''，用 x 記 μ 与 $\mu'+\mu''$ 相遇的第一个頂点（在 a_0 之后），用

y 記 μ 与 $\mu'+\mu''$ 相遇的最后一个頂点(在 a_k 之前)。

第一种情况: $x=a_k, y=a_0$. 在这种情况(图 20-2, 上图),欲求的圈是

$$\mu[a_0, a_k]+\mu'[a_k, a_0].$$

第二种情况: $x\neq a_k$, $y\neq a_0$, $x\in\mu'$, $y\in\mu'$. 在这种情况(图 20-2, 中图),欲求的圈是

$$\mu[a_0, x]+\mu'[x, y]+\mu[y, a_k]+\mu''[a_k, a_0].$$

第三种情况: $x\neq a_k$, $y\neq a_0$, $x\in\mu''$, $y\in\mu''$. 这种情况和上一情况同。

第四种情况: $x\neq a_k$, $y\neq a_0$, $x\in\mu'$, $y\in\mu''$. 在这种情况(图 20-2, 下图),欲求的圈是

$$\mu[a_0, x]+\mu'[x, a_k]+\mu[a_k, y]+\mu''[y, a_0].$$

第五种情况: $x\neq a_k$, $y\neq a_0$, $x\in\mu''$, $y\in\mu'$. 这种情况和上一情况同。

这五种情况概括了所有可能的状态,故定理得証。

定理 5　对于一个无环且无孤立点的图 G, 下面的条件是等价的:

(1) 过任意二边总有一个初級圈;

(2) 过任意二頂总有一个初級圈;

(3) 图是不可断的。

茲往証(1)⇒(2)⇒(3)⇒(1).

(1)⇒(2),蓋取任二頂点 x 与 y, 这二頂必是某某两边的端点(图 G 沒有孤立点),且有一初級圈过此二边;因而 x 与 y 属于这个初級圈。

(2)⇒(3),蓋按(2),图是連接的;但另一方面,若存在断点,被这个断点分隔的二頂 x 与 y 将不能在同一条初級圈上,这与(2)矛盾。

(3)⇒(1)，据前一定理。

現在来研究一个任意的图 G；若 x 是断点之一，而 C 是由于 x 的消去，分离出来的分图之一，由 $C\cup\{x\}$ 构成的 G 的子图，定义为 G 的**一片**。一片恒用一个断点和图的其他部分相联。每一片可能包含其他更小的片；当一个片不再含有别的片时，便謂这个片是一个**极小片**。

这些概念可用以建立一种簡单的判断，来識別是否有一个初級圈过二已給的頂点；事实上，若 a 与 b 是一个初級圈上的相异二点，則总能将不同时包含 a 与 b 的那些片去掉，以簡化原图，最后剩下一个子图，其边多于一。反之，若經过簡化之后，尚余一个子图，其边多于一，这个子图将是不可断的，且含 a 与 b；据定理5，确存在一个初級圈經过 a 与 b；总之，存在一个初級圈过二已知頂点的必要和充分条件是这种簡化总保留一个子图，其边多于一。

【例1】 阿惕拉馬問題　在棋盘上放一白馬（阿惕拉馬）及一黑后，如图20-3（左图）所示；打阴影的方格叫做"火坑"。现在要求按走棋的一般規則，将馬一直走到黑后的位置，然后再回到出发点，但决不能将馬放在一个火坑上，也决不能将馬放在已經走过的位置（大家知道，这样一来，馬将被燒死）。

这个問題，归結为对图20-3的那个图（右图），确定一个初級圈，經过二

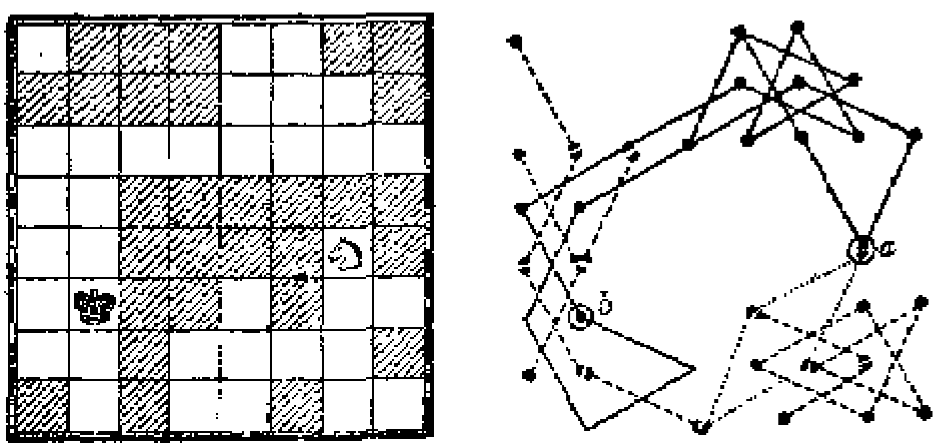


图 20-3

已知頂点 a 与 b；經簡化之后，去掉某些片（虛綫表示的），剩下一个多于一条边的子图（实綫表示的），故問題是可能的。

58　h-联　图

研究一个$n=|X|$阶的連接图$G=(X, U)$；$A\subset X$是一个非空集合，若由$X-A$构成的子图已不再連接，定义A为一**断集**。若A蜕化为只含一点的一个集合，便回到断点的概念。

一个不連接的图，空集$\varnothing$也看成是一断集。最后，n阶图$n-1$个頂点的集合，叫做**隔离集**。

一个图G，其断集或其隔离集中元素个数的极小，定义为图的**連接数**，記为$\omega(G)$。設h为一整数$\geqslant 0$，而图G的連接数$\omega(G)\geqslant h$，便謂图G是**h-联的**。

【例1】 竞賽程序表　参加某項竞賽的有n个人，当安排这n个竞賽人之間的对抗，且将对抗的次数限制在m以內，則連接数是一个重要的概念。若有一小部分竞賽人不可能是隔离的或有过多对手，卽謂n个頂点m条边的代表图有比較高的連接数，这个竞賽将是公平的。例如五个参加人九次对抗的某一竞賽，用图20-4的那个图来表示，这个图是3-联的；三个参加人的断集，表以打圈圈的几个点。九个参加人20次对抗，使用图20-5的那个图，这个图是4-联的，等等。

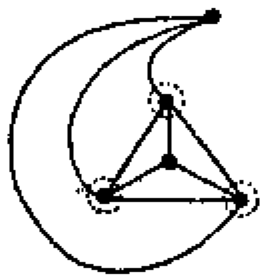


图　20-4

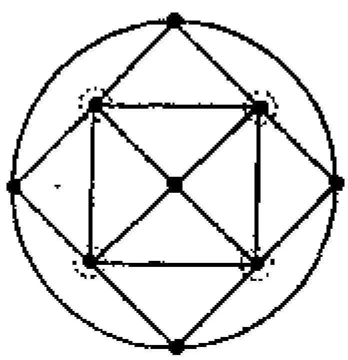
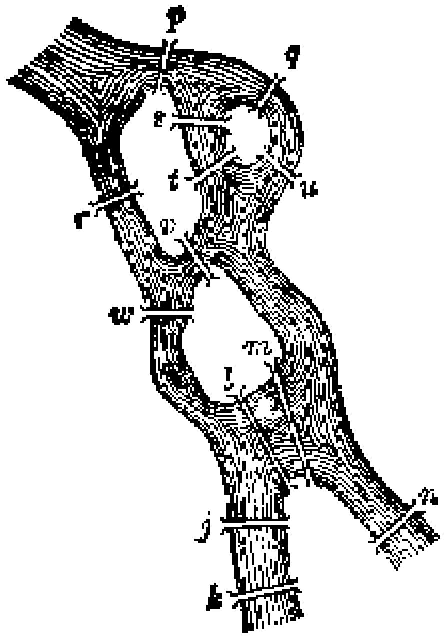


图　20-5

【例2】 交通綫路的轰炸　对敌国的交通綫路加以轰炸，使其一个地区，或多个地区完全孤立，一般认为这是对敌国經济力量与軍事力量的致命打击。問題是：必須毁坏多少交通綫路(至少)，才能达到这一目的？作图(X, U)，其頂点代表幅輳的且經过精密設計的內部交通岔道口，而其边則是联接两个不同的岔道口且能够予以摧毁的交通綫路(例如：桥梁，隧道，鉄路



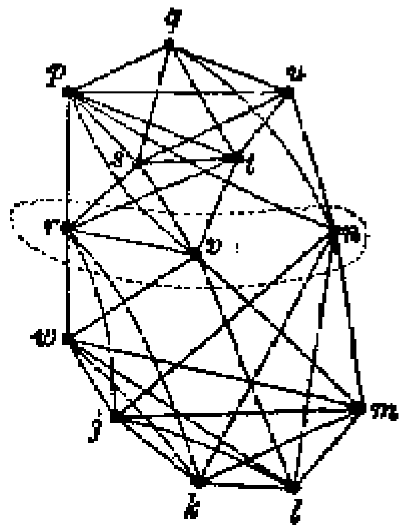


图 20-6

等…)，問題于是归結为确定所应去掉的极小边数，以截断所得的图。

我們可以借助于作出輔助图 (U, Δ)，将問題回到連接性的理論上来，这个輔助图以 U 的边作为其頂点，且若 u 与 v 相邻，則 $u\in \Delta v$。譬如要求轰炸在图 20-6（左图）上所标出的桥梁，繪出右图，这个图是 3-联的；对应于断集 $\{r, v, n\}$ 的是三座桥梁，将其炸毁，即足以达到所提出的目的。

以下，h 表一整数 >0；n 阶的图 G，謂其为"h-联"的，总指：

(1) G 是連接的，

(2) $h<n$，

(3) G 不具有断集 A，其 $|A|<h$。

一个图 G 是 2-联的，当且仅当这个图是不可断的；現将加以論述的 h-联图的特征，是以上所述关于不可断图定理的推广。

定理 6 在一个 h-联的图里，每一頂点的次数 $\geqslant h$。

事实上，設 G 是一个 h-联的图，而 x_0 是其一頂。若 x_0 仅是 $h-1$ 边的端点，取这 $h-1$ 边的另一端点，构成集合 A。因图是 h-联的，故有

$$h-1\leqslant (n-1)-1=n-2,$$

故在图 G 里，倘存在一点，异于 x_0 且不在 A 内：于是集合 A 是一断集。因 $|A|=h-1<h$，該图不是 h-联的，遂得矛盾。

定理 7 若 G 是一个 h-联的图，去掉一个頂点所得的子图 G' 是 $(h-1)$-联的。

事实上，$h<n$ 导致

$$h-1<n-1=n'.$$

另一方面，为了截断 G'，至少須去掉 $h-1$ 个頂点，故 G' 确是 $(h-1)$-联的。

魏特内(Whitney)定理 一个图是 h-联的必要和充分条件是可用 h 条相异的初級鏈联接任意二頂 a_0 与 z，而这些鏈除 a_0 与 z 外，无其他公共頂点。

条件是充分的 盖若任意二頂可用 h 条相异鏈相联，图 G 是連接的。在連接 a_0 与 z 的 h 条鏈里，最多只有一条其长为 1，面其他 $h-1$ 条合并起来，則至少包含 $(h-1)$ 个相异頂点（且异于 a_0 与 z），因此

$$n\geqslant(h-1)+2>h.$$

最后，G 沒有断集 A，其 $|A|<h$，盖若不然，在由 $X-A$ 所成子图的两个互不相交的分图里，取二点 a_0 与 z：連接 a_0 与 z 的每一条鏈，都經过集合 A，故不可能有 h 个相异頂点。

条件是必要的 于此須証，若 G 是 h-联的，我們可以求得 h 条互不相交的初級鏈，以联接任意二頂。当 $h=2$，这个論断前已証明(蒙格尔定理)。因此，假定定理对于 $(h-1)$-联的图已真，由此往証，对于任給的 h-联的图，定理亦真。換言之，即往証 G 的二頂 a_0 与 z，确由 h 条互不相交的初級鏈相联。

G 是不可断的（因 $h\geqslant2$），a_0 与 z 可用两条互不相交的鏈相联，且其中至少有一条是长度 $\geqslant2$ 的，譬为

$$\mu=[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_k, z],$$

顶点 a_0 与 a_2 由 h 条互不相交的鏈相联：盖若去掉鏈$[a_0, a_1, a_2]$ 以自图中消去顶点 a_1，将余一个 $(h-1)$-联的图（定理7），a_0 与 a_2 将由 $(h-1)$ 条互不相交的鏈相联。因此須証若 a_0 与 a_k 可用 h 条互不相交的鏈相联，a_0 与 a_{k+1} 也能用 h 条互不相交的鏈相联。記联接 a_0 与 a_k 的互不相交的鏈以 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_h$.

1° 首先假定諸鏈 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_h$ 沒有一条包含 a_{k+1}. 去掉顶点 a_k，所得的图是 $(h-1)$-联的，顶点 a_0 与 a_{k+1} 由互不相交的鏈 $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{h-1}$ 相联，其中沒有一条过 a_k. 現在按下列方式，借助于 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_h, \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{h-1}$ 以作出联接 a_0 与 a_{k+1} 的互不相交的鏈。

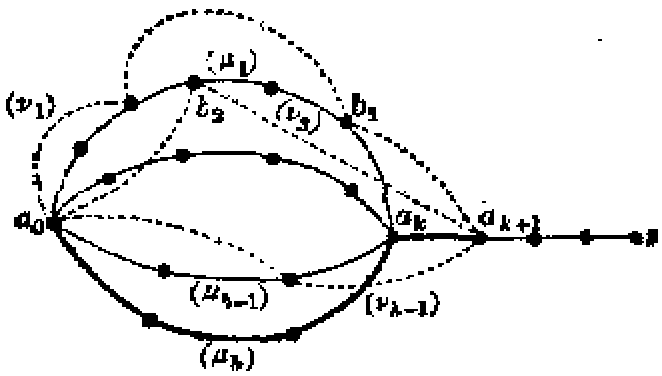


图 20-7

1) 沿鏈 ν_1 自 a_{k+1} 走向 a_0，設 b_1 是与 $\sum_{i=1}^{h}\mu_i$ 相遇的第一点；譬設 $b_1 \in \mu_1$，取

$$\mu_1' = \mu_1[a_0, b_1] + \nu_1[b_1, a_{k+1}].$$

2) 沿鏈 ν_2 自 a_{k+1} 走向 a_0，設 b_2 为与 $\mu_1' + \sum_{i=2}^{h}\mu_i$ 相遇的第一点（a_{k+1} 除外）；两种情况須加考虑：若 $b_2 \in \mu_i$, $i>1$, 象上面一样，取

$$\mu_i' = \mu_i[a_0, b_2] + \nu_2[b_2, a_{k+1}].$$

但若 $b_2 \in \mu_1'$，取消 1) 的运算，而取

$$\mu_1' = \mu_1[a_0, b_2] + \nu_2[b_2, a_{k+1}].$$

此时也称修訂了鏈 μ_1'; 相应地交换 ν_1 与 ν_2 里的指标 1 与 2。

3) 設沒有这样的修訂，沿鏈 ν_3 自 a_{k+1} 走向 a_0，并設 b_3 为与 $\mu_1'+\mu_i'+\sum_{h\neq 1,i}\mu_h$ 相遇的第一点。于是又回轉到或者定义一条鏈 μ_i'，或者修訂 μ_1' 与 μ_i' 中的一条，等等。

(設在 2) 里，有如上的修訂，则修訂之后，沿備待使用的新鏈 ν_2，重复上面的討論。)

这个做法，能重复多少次，便尽量重复下去；因每一次修訂，总归結为縮短諸鏈 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_h$ (这些鏈都是有限长的) 之一，故最后一定可以达到一个时候，不复能再行修訂，因而得到形如：

$$\mu_1'=\mu_1[a_0, b_{i_1}]+\nu_1[b_{i_1}, a_{k+1}],$$
$$\mu_2'=\mu_2[a_0, b_{i_2}]+\nu_2[b_{i_2}, a_{k+1}],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mu_{h-1}'=\mu_{h-1}[a_0, b_{i_{h-1}}]+\nu_{h-1}[b_{i_{h-1}}, a_{k+1}]$$

的 $(h-1)$ 条鏈。

这些鏈是两两互不相交的，盖若 $\mu_1[a_0, b_{i_1}]$ 与 $\nu_2[b_{i_2}, a_{k+1}]$ 有一个公共頂点 (异于 a_0 与 a_{k+1})，则須进行一次修訂工作。此外，沒有一条鏈 $\nu_1[b_{i_1}, a_{k+1}], \nu_2[b_{i_2}, a_{k+1}], \cdots, \nu_{h-1}[b_{i_{h-1}}, a_{k+1}]$ 与鏈 μ_h 相遇(除非是 a_0 与 a_{k+1}，或者有此可能)，盖所有的鏈 μ_i，按照我們的法則，无論修改至那个时刻，其本身都是不变的。由此可以推知，沒有一条鏈 $\mu_1', \mu_2', \cdots, \mu_{h-1}'$ 和鏈

$$\mu_h'=\mu_h[a_0, a_k]+[a_k, a_{k+1}]$$

相遇。

于是鏈 $\mu_1', \mu_2', \cdots, \mu_h'$ 便是所欲求的 h 条鏈。

2° 現在設 a_{k+1} 属于 μ_i 中某一鏈，譬設 $a_{k+1}\in\mu_h$，将 μ_h 改成 $\mu_h[a_0, a_{k+1}]$，再按上述法則进行。

推理 1 若 G 是一个 h-联的图，去掉一边所得的图 G' 是 $(h-1)$-联的。

事实上，任意两顶，在 G 里至少可用 h 条互不相交的链相联，故在 G' 里，至少可用 $(h-1)$ 条互不相交的链相联。

推理 1 若 G 是一个 h-联的图，去掉 $k(k<h)$ 条边所得的图 G' 是 $(h-k)$-联的。

(显然)

最后，再做这样一个論断，即在一个 h-联的图里，为了将其截断，至少须去掉 h 条弧。

第21章 平 面 图

59 一 般 性 質

一个图(或一个多重图) G,若能将其在平面上表示出来,使其頂点是平面上不同的点,其边是平面上的簡单曲綫,且任意两边,除端点外不再相交,这样的图,称为是**平面的**。图 G 在平面上的表示,滿足所提出的条件,称为**拓扑平面图**,仍記以 G;若能将平面經过彈性变形,使两个拓扑平面图相重合,則这两个图便不看做是相异的。

【例1】三个別墅和三个工厂的問題 現有三个別墅 a, b, c, 想用管道联到一个自来水厂 d, 一个煤气厂 e 及一个发电厂 f. 問是否可能将这三个别墅,三个工厂及所需管道加以安排(在平面上),使每二管道,除其端点外,不再相交?經驗指出,总能将八条管道如此安排,而第九条管道总与其他八条之一相交。以后将对这种現象加以解釋。

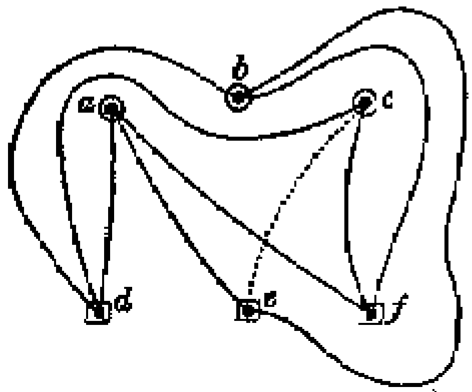


图 21-1

設 G 是一个拓扑平面图,G 的**一个面**,按定义是图的边所包圍的一个区域,在其內既不含图的頂点,也不含图的边。用字母 r, s, t 等記面,而面的集合則記以 R. 面 r 的**周界**,是包圍 r 的諸边所构成的圈。两个面 r 与 s, 若其周界至少有一条公共的边,則这两个面称为**相邻**;两个面仅以一个頂点相接,这两个面不是相邻的。

【例2】一張地图是一拓扑平面图(在沒有島的情况下);这样的图,其每一頂点有一次数 $\geqslant 3$,以作为其特点。一个面可能和同一个面多次相邻;在图21-2上,面 g 与面 d 虽有一个公共点,但二者并不相邻。图 21-2 上的图是一

个多重图。

最后还须注意，在一个平面图里，总有一个且仅有一个沒有限制的面，这样的面叫做**无限面**（譬如图 21-2 上的面 e），其他的面 c, d, f, g, h, i, j 都是**有限面**。

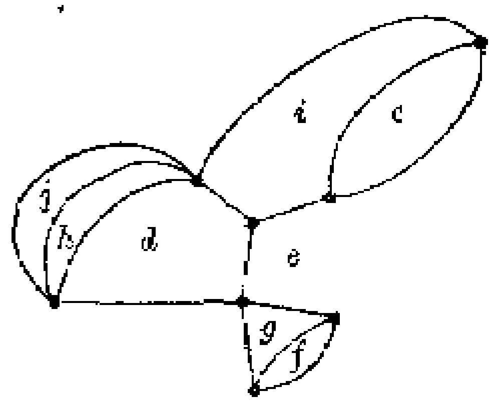


图 21-2

定理 1 在一个拓扑平面图 G 里，所有不同的面的周界，构成独立圈的一个基底。

若 G 只含两个有限面，定理是眞的；設对于所有具 $f-1$ 个有限面的图定理都眞，自此出发，往証对于具 f 个有限面的图定理亦眞。

事实上，去掉 G 的一边 u，得图 G'，具 $f-1$ 个有限面，按假設其周界构成独立圈的一个基底。将边 u 重新加进图里，作出一个新的有限面，其周界是一个圈，和以前的圈綫性无关（因这个圈含有一条边，不在其他圈内）。因增加一条边，所可能将腡数加大的，不能超过一个单位，故 G 的有限面恰好确定了独立圈的一个基底。

推理 1 若在一个連接的拓扑平面图里，共有 n 个顶点，m 条边及 f 个面，則

$$n-m+f=2 \quad \text{（尤拉公式）}.$$

事实上，有限面的个数等于腡数 ν，因此

$$f=\nu+1=(m-n+1)+1=m-n+2.$$

由此便可推得上述公式。

推理2　在一个平面图里(非多重图)，总有一个顶点，其次数 $d(x)\leqslant 5$.

事实上，在相应的拓扑平面图里，每一面至少由三条相异边围成；构造面-边相交的偶图[1]，一方面其弧的个数 $\leqslant 2m$，另一方面又 $\geqslant 3f$，故有 $f\leqslant\frac{2m}{3}$。若每一顶点至少是6条边的端点，按同样方式，得 $n\leqslant\frac{2m}{6}$，按尤拉公式，遂可书

$$2=n-m+f\leqslant\frac{m}{3}-m+\frac{2m}{3}=0,$$

导致谬误。

推理3　在一张地图里，至少有一个面，其周界所含的边数 $\leqslant 5$.

事实上，一张地图，其每一顶点至少是三条边的端点，构造其顶-边相交的偶图，则其边数，一面，$\leqslant 2m$，另一面，$\geqslant 3n$，故 $n\leqslant\frac{2m}{3}$。设每一面都有一个周界，至少含6条边，构造其面-边相交的偶图，则一面边的个数 $\leqslant 2m$，另一面，$\geqslant 6f$，故 $f\leqslant\frac{2m}{6}$，由此

$$2=n-m+f\leqslant\frac{2m}{3}-m+\frac{m}{3}=0,$$

导致谬误。

推理1所述的尤拉公式，在很多情况，非常有用。

【例1】(尤拉)　研究在3維空間里 n 点，m 边，f 面的一个凸多面体。很明显这个凸多面体可在一个球面上表示出来，其任二边除端点外不再相交；然后在某一面里取一点，以此为中心，作一测地投影，这个凸多面体便可在平面上表示出来。这个图既是平面的，乃得关于凸多面体的一个基本关系式：

---

[1] 即謂一个图，由代表面的点的集合 X，代表边的点的集合 Y，及一些自 $x\in X$ 走向 $y\in Y$ 的弧所构成，而每当一个面 x 交于边 y 一回，便联出这样的一条弧。

$n-m+f=2$。

【例2】借助于尤拉公式，现在来証明三个别墅三个工厂問题(图 21-1)的图不可能是平面的。設其是平面的，将有

$$f=2-n+m=2-6+9=5.$$

每一面，其周界至少含 4 条边(若某一面只有 3 条边，则这个面将由 3 个頂点所构成，其中两个属于同一类型：别墅或工厂，但同一类型的二頂不可能相邻)。构造面-边相交的偶图，则边的个数，一面，$\le 2m$，一面，$\geqslant 4f$，于是

$$18=2m\geqslant 4f=20.$$

导致謬誤。

【例3】同样来証五个頂点的完备图不是平面的。假使这个图是平面的，便有

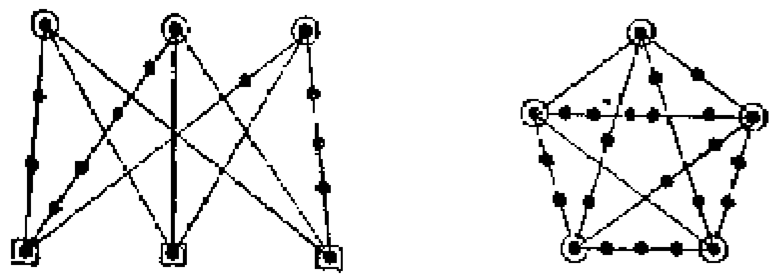
$$f=2-n+m=2-5+10=7.$$

每一面，在其周界里至少有三条边。构造其面-边相交的偶图，其边数，一面，$=2m$，一面，$\geqslant 3f$，故

$$20=2m\geqslant 3f=21.$$

导致謬誤。

三个别墅三个工厂的图，和五个頂点的图，可用来定义整个非平面图族：象在图 21-3 上所見到的那样，只須在每一边上，任意放上若干点，即足以定出模型 1 或模型 2 的其他非平面图。这个注有其逆定理，乃库拉图斯基 (Kuratowski) 所推导出来的一个相当难的定理，我們現在来加以証明。首先闡明某些术語：設 μ 是一初級圈(任給以一个方向)，a, $b\in\mu$，在圈上按正向自 a 走到 b，所遇到的 μ 的頂点，构成一个序列，記以 $\mu[a, b]$ (a 与 b 包含在内)，



(模型 1)　　(模型 2)

图 21-3

μ]a, b[記此同一序列，但a与b除外。此外，若G是一个有断集A的图，由$X-A$构成的子图，其某一連接分图C，再加上和C相交的弧及这些弧的端点，称为图G(关于A)的一片。

庫拉图斯基定理　图G是平面的，其必要和充分条件是这个图不具有模型1或模型2的部分子图。

已見具有模型1或模型2的部分子图的图是非平面的；现在来証其逆，即往証不具有模型1或模型2的部分子图的图是平面的。

若G只有一、二或三条边，定理为真；故用归納法来加以論証：設对于所有少于m条边的图，定理为真，自此出发，往証对于m条边的图G，定理亦真。

設G是一个m条边的图，不具有模型1或2的子图，但是非平面的。这个图应是連接的，否则其分图都是平面的，因而G也是平面的。同样，这个图是不可断的，否则，关于某一断点a的諸片都是平面的，将断点a映象到諸片的无限面上，这些片都可以平面表示(至多做一次測地投影)，因而G是平面的。

1° 现在来証撤消G的一边[a, b]，将仍保有过a与b的一个初級圈μ。事实上，若不如此，则自G出发，經过边[a, b]的撤消，所得的图G'将是可断的(据第20章蒙格尔定理)；关于某一断点c，顶点a与b将在相异片C_a与C_b上。

自C_a出发，加进边[a, c]，所得的图C'_a是平面的，盖这个图不含模型1或模型2的图(因这个图是由G縮小得来)。因此，可作一个測地投影，将C'_a平面表示，使边[a, c]在无限面的周界上。按同一理由，自C_b出发，加进边[b, c]，所得的平面图C'_b，也可以平面表示，使[b, c]在无限面的周界上。連接a与b，得一拓扑平面图包含G，由此乃导出矛盾。

2° 现在来研究，在去掉边[a, b]之后，所得到的拓扑平面图

G' 里，过 a 与 b 而包含最多的面于其内的那个初級圈 μ. 給 μ 以任一方向；μ 将整个平面分成两个区域，頂点含在內部（外部）的 G' 的那些片称为內片（外片），任一外片所能包含的 $\mu[a, b]$ 的頂点，不能多于一个（否則将能作出一个圈 μ，包含更多的面于其內）；因对 $\mu[b, a]$ 有同样的結果，故一个外片仅能与 μ 相遇于一点或两点。此外，至少存在一个外片与一个內片，同时与 $\mu]a, b[$ 及 $\mu]b, a[$ 相遇（因不能将边 $[a, b]$ 在平面上画出）。

3° 往証存在一个內片 C 和一个外片 D 与 $\mu]a, b[$ 及 $\mu]b, a[$ 二者都相遇，且 D 与 μ 的接触点 c 与 d，C 与 μ 的接触点 e 与 f 相間地排于 μ 上：c, e, d, f.

事实上，假定实际情况不如此；設 C_1 是和 $\mu]a, b[$ 及 $\mu]b, a[$ 相遇的一个內片，并設 e_1 与 f_1 是两个接触点，在 μ 上前后相續。联 f_1 与 e_1，便可作一連續的綫 ν，全在 μ 之外，且不与現存的任一边相遇（因按假設不存在任何外片与 $\mu]e_1, f_1[$ 及 $\mu]f_1, e_1[$ 相遇）。

每一內片，仅与 $\mu[f_1, e_1]$ 相遇的，便可轉移到外面，在 ν 与 μ 所范圍的那个面內；片 C_1 就是这种情况。但至少存在一个內片 C_2，不能这样轉移（盖若不然，a 与 b 将能平面地相联），这个片有两个連續的接触点 e_2 与 f_2 在 $\mu[f_1, e_1]$ 之上，且其中至少有一点在 $\mu]f_1, e_1[$ 上。

替代 C_1，对 C_2 继續作同样的轉移，等等；这个做法决不停止，但图是有限的，遂得矛盾。

以下，用 e, f, g, h 記 C 与 μ 的接触点，而滿足

$$e\in \mu]c, d[,\quad f\in \mu]d, c[,\quad g\in \mu]a, b[,\quad h\in \mu]b, a[$$

者。

显見 $e\neq f$, $g\neq h$，但可能 $e=g$, $e=h$，等等。

4° 若頂点 e 与 f，一个在 $\mu]a, b[$ 上，一个在 $\mu]b, a[$ 上，便可假定 $e=g$, $f=h$；立見（图 21-4）G 包含一个模型 1 的图，这和原設

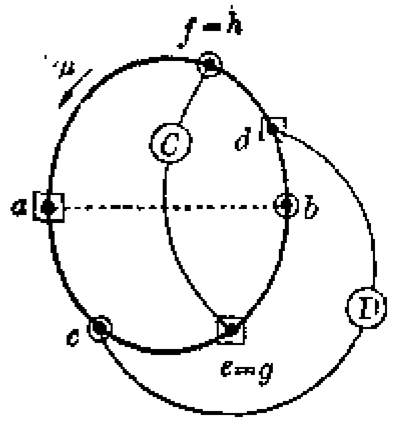


图 21-4

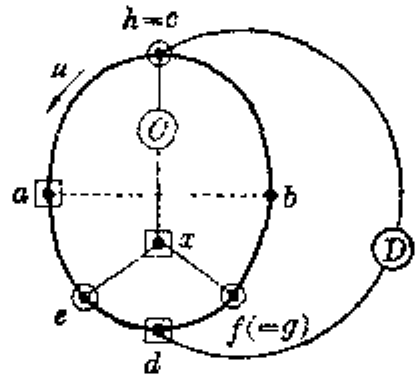


图 21-5

相違。

5° 若頂点 e 与 f 二者全在 $\mu]a, b[$上，可以假定 $h=c$（盖若 $h\neq c$, $h\in\mu]b, a[$，便得一个在 4° 里所排斥的图）。遂得图 21-5，这个图包含一个模型 1 的图：謬誤　同样理由，可以排除 e 与 f 二者同在 $\mu]b, a[$上的情况。

6° 若 $e=a$, $f\neq b$（譬如 $f\in\mu]a, b[$），得图 21-6，包含一个模型 1 的图：謬誤。

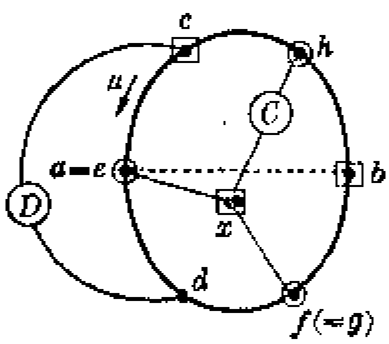


图 21-6

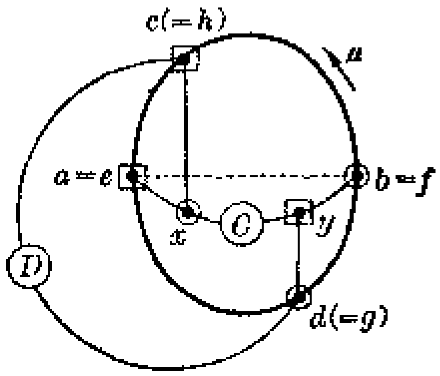


图 21-7

7° 若 $e=a$, $f=b$，可以假定 $g=d$ 与 $h=c$（盖若不然，将得一个在 4° 与 6° 里所排斥的图）。两种情况，須予考慮：若联接 cd 与 ef 的 C 的二鏈有一个以上的公共点，得图 21-7 上那个图，含一个模型 1 的图：謬誤。若联接 cd 与 ef 的 C 的二鏈仅有一个公共点，得图 21-8，含一个模型 2 的图：謬誤。

所有 e 与 f 的位置,均已加以检查,上面那样确定的图 G,根本不能存在,这就証明了定理。

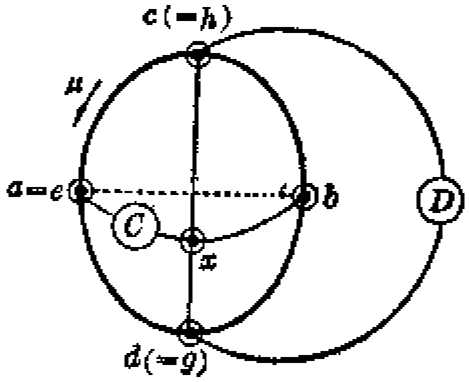


图 21-8

定理3 平面图是五色的。

这个定理对于1, 2, 3, 4, 5个頂点的平面图已眞;設对所有 $n-1$ 个頂点的图,定理已眞,自此出发,往証对于任給的具 n 个頂点的平面图 G,定理亦眞。

事实上,按推理2,在图 G 里有一个頂点 x,和0, 1, 2, 3, 4,或五个頂点相邻,去掉 x,所得到的子图是五色的,将其頂点用五种顏色加以涂染:α, β, γ, δ, ε. 除該点和五个不同的頂点相邻,且已染以五种不同的顏色这一情况之外,頂点 x 是甚易染色的。

在这种情况下,設 a, b, c, d, e 是与 x 相邻的五个頂点(按环繞 x 的某一方向排列),并設 α, β, γ, δ, ε 是其相应的顏色。用 $G_{\alpha,\beta}$ 記由 α 色与 β 色各頂所构成的子图,等等。

1° 若在图 $G_{\alpha,\gamma}$ 里,a 与 c 不連接,考虑含 a 的那个分图,将其所有 α 色的頂点,涂以顏色 γ,而所有 γ 色的頂点,改涂顏色 α,这一新的着色方法,和图 G 是相容的,且頂点 x 仅被顏色 γ, β, γ, δ, ε 所包圍,故可涂以顏色 α.

2° 若在图 $G_{\alpha,\gamma}$ 里,a 与 c 是連接的,則在图 $G_{\beta,\delta}$ 里,頂点 b 与 d 便不能連接。交换 $G_{\beta,\delta}$ 含頂点 b 那个分图里的顏色 β 与 δ,便可用顏色 β 涂染 x.

这个結果,似乎可以改进:下面尙待証明的叙述,称为**四色猜想**:所有的平面图都是四色的。

若引用**对偶**概念,則这个論断,可用另一种形式将其写出。現在来研究一个連接且无孤立点的拓扑平面图 G;按下述方式,作一拓扑平面图 G^* 与之对应:

在 G 的每一个面 s 的内部，放上 G^* 的一个顶点 x^*，对应于 G 的每一边 u，作 G^* 的一边 u^*，这条边連接各在 u 的一侧的面 s 及 t 所对应的頂点 x^* 和 y^*，这样定义的拓扑图 G^* 是平面的(見图 21-9)，連接，且无孤立点：称为 G 的对偶图。以下性质，应予注意：

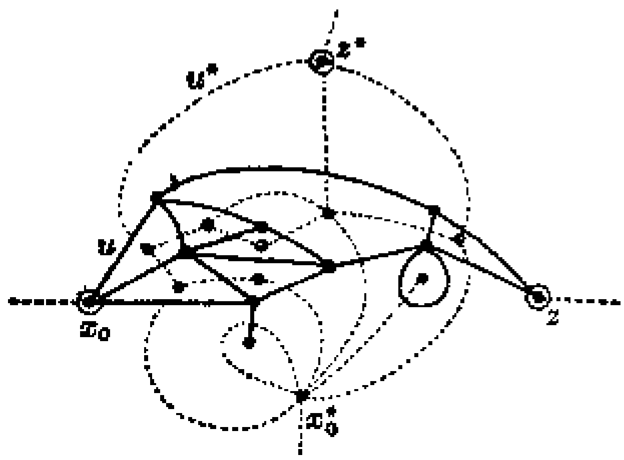


图 21-9

1° G^* 的对偶图是 G；二图 G 与 G^* 的腩数相等(1)。

2° 对应于 G 的每一环，是 G^* 的一条悬挂边，反之亦然。

3° 若 G 有断点，則 G^* 亦然(2)。

4° 若 G 有許多边联接相同的二頂，則 G^* 有二次頂点（非結点)。

【例 4】 現在来研究一个平面运輸网絡（无向的）G，其中每一边 u 給以一个容量 $c(u)\geqslant 0$，其发点 x_0 和收点 z 在同一水平綫上。在 G 的无限面上，作出相异的两个对应頂点 x_0^* 与 z_0^* 以构成对偶图 G^*：x_0^* 对应于下半平面，z^* 对应于上半平面。給边 u^*（对应于 u 的）以长度 $l(u^*)=c(u)$。然后考虑下面的問題：

問題 1 在 G 里求一截集 V，具极小容量；即极小化

$$c(V)=\sum_{v\in V}c(v).$$

問題 2 在 G^* 里求一最短路徑 V^*，自 x_0^* 走向 z^*；即极小化

$$l(V^*)=\sum_{v^*\in V^*}l(v^*).$$

問題 1 等价于极大流量問題，問題 2 等价于最短路徑問題，在平面图里，

---

(1) 若 G 是連接的，G^* 的对偶图是 G，若 G 不連接，这个論断不成立。又 G 与 G^* 的腩数一般不相等，其相应的 ρ, ν, ρ^* 与 ν^* 之間，有下述关系：

$$\rho^*=\nu,\ \ \nu^*=\rho.$$

——譯者注

(2) G 与 G^* 連接性之間的联系，魏特內已予研究[8]。

这两个問題合而为一。

四色的猜想，在对偶形式下，可叙述如次：在一个平面图里，能用四种颜色，涂染諸面使相邻的两面，具不同的顏色。

若实际去涂染图 G，只須考虑連接图（除分别涂染各个分图外）及不可断图　可以假定沒有 0，1，或 2 次的顶点。且可限制只考虑三次齐次图，盖每一次数大于 3 的頂点 x，在着色的过程中，可用和接触 x 的每一面有一条公共边的充分小的新面，将其包圍起来。簡化到最后，所得的图 G，三次齐次，且无地峡边（因其是不可断的），按第 19 章定理 5，这个图的色級 $\leqslant 4$.

引理　在一个平面图里，給每一边 $\boldsymbol{u}$ 以一个唯一的方向及一个整系数 $\pi(\boldsymbol{u})>0$[1]；对每一鏈 μ 及每一边 $\boldsymbol{u}\in\mu$，若 $\boldsymbol{u}$ 的方向和 μ 的走向相同，取 $\pi_\mu(\boldsymbol{u})=+\pi(\boldsymbol{u})$，在相反的情况，則取 $\pi_\mu(\boldsymbol{u})=-\pi(\boldsymbol{u})$. 若每一面的周界 μ 滿足

$$\sum_{\boldsymbol{u}\in\mu}\pi_\mu(\boldsymbol{u})\equiv 0 \pmod 4,$$

則这个图是四色的。

总可假定图是連接的　現在来用逐步确定方式，給每一頂点 x 标以系数 $p(x)$.

先对任一頂点 x_0，取 $p(x_0)=0$.

对于一个頂点 y，还沒有标数，但和一个已經标数的頂点 x 相邻，作为 $p(y)$ 可算出 $p(x)+\pi(x,y)$（若該边的方向是自 x 走向 y 的），或 $p(x)-\pi(x,y)$（若該边的方向是自 y 走向 x 的）；最后，加上或減去一个 4 的倍数，将結果化成一个数 $\geqslant 0$ 而 $\leqslant 3$.

按照这样的方式，$p(x)$ 仅取值 0，+1，+2 或 +3，且将确定于全部图上（因这个图是連接的）；在一个已知的頂点 x 上，所可能定出的 $p(x)$ 的值也是唯一的（模），盖若取两条不同的路

---

(1) 整系数 $\pi(\boldsymbol{u})$ 应滿足条件：$\pi(\boldsymbol{u})\not\equiv 0 \pmod 4$.——譯者注

$\mu_1=\mu_1[x_0, x]$与$\mu_2=\mu_2[x_0, x]$以确定$p(x)$，圈$\mu_1-\mu_2$是面的周界的一个和(按定理1)，故

$$\sum_{u\in\mu_1-\mu_2}\pi_\mu(u)\equiv 0 \pmod 4$$

或

$$\sum_{u\in\mu_1}\pi_{\mu_1}(u)\equiv\sum_{u\in\mu_2}\pi_{\mu_2}(u) \pmod 4.$$

在每一顶点x上分配一种颜色$i=p(x)$，则所有顶点，恰能用四种不同颜色加以涂染，使相邻二顶各具不同的颜色。 証毕

定理4 設G是一个平面图，三次齐次，且无地峡边；这个图的諸面，可用四种颜色加以涂染，使相邻二面，各具不同的颜色，其必要和充分条件是这个图的色級为三。

1° 若能将G的諸面，染以四种颜色$\alpha, \beta, \gamma, \delta$，将分隔一个$\alpha$面和一个$\beta$面或一个$\gamma$面和一个$\delta$面的諸边，打上記号1；分隔一个$\alpha$面和一个$\gamma$面或一个$\beta$面和一个$\delta$面的諸边打上記号2；分隔一个$\alpha$面和一个$\delta$面或一个$\beta$面和一个$\gamma$面的，打上記号3。相邻二边不可能标有相同的記号(盖若不然，将有相邻的两面，具相同的颜色)。故图G的色級是3.

2° 若G的色級为3，对偶图G^*的每一边u^*可按边u所涂的颜色1, 2, 或3，分配以系数$\pi(u^*)=1, 2$，或3，再据对齐次图的研究(第19章)，可将諸边定向，使满足引理的条件。

依据引理，图G^*是4-色的，于是定理得証。

60 推 广

以上那些概念，若将其引向近代拓扑理論上来，可加以补充和推广，但这超出了本书的范圍[1]。此处将仅指出某些极为主要的

[1] 参看 S. Lefschetz, *Introduction to Topology*, Princeton University Press, Princeton, 1949.

結果。

每一个图 G，可在 3 維空間里表示出来，使其每两边互不相交。这样的一种表示，称为**拓扑图**，仍記以 G. 若 S 記 3 維空間 R^3 的一个曲面，且若存在一个双边連續的一一映象 σ，将 G 映射到 S 上，則 σG 的任意两边互不相交，σG 定义为 S-**拓扑图**。若 S 是一个平面，便得拓扑平面图这个概念。

于此，将只限于封閉的有向的有限曲面[1]，凭通常的直观，便可毫无困难地加以认識；对于这样的曲面 S，在其上画出若干条封閉曲綫，使其中任二曲綫互不相交，而不将曲面切断，可能作出的这种曲綫的极大个数，定义为曲面 S 的类 g. 据此，球面便是 0 类的，环面(汽車輪胎)是 1 类的，等等。

由一般定理(見 [1])，可以导出，每一有限图，可在一个类数充分大的曲面 S 上表示；此外，关于任一 S-拓扑图 G，可以作出一个 S-拓扑图 G^* 与之相应，恰和定义平面图的对偶图一样。設 $\gamma(G)$ 表示图 G 的色数，取

$$\gamma(S)=\max\{\gamma(G)/G \text{ 是 } S\text{-拓扑的}\},$$

$$\gamma'(S)=\max\{n/n \text{ 阶完备图是 } S\text{-拓扑的}\}.$$

显有 $\gamma'(S)\leqslant\gamma(S)$.

对于一个 g 类的曲面 S，取

$$n_g=\left(\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{48g+1}\right)\text{的整数部分。}$$

于是有

$$g=0\ (\text{球面}) \qquad \to n_g=4,$$

$$g=1\ (\text{圆环面}) \qquad \to n_g=7,$$

---

[1] 现在来回忆一下，一个拓扑空間 S，若每一点 $x\in S$ 都具一个与单位圆同态的鄰域，这个空間便是一个曲面；若所有不同鄰域的定向，可以結合起来，曲面 S 称为有向的，最后，若 S 再是一个紧致空間，曲面便称为封閉的；由此，球面是封閉的，而平面則否。类似于现在所指出的一些結果，对于无向的曲面，也能成立(見[6])。

$$g=2 \text{（二圆环的絞环面）} \rightarrow n_g=8,$$
$$g=3 \qquad\qquad\qquad \rightarrow n_g=9.$$

赫烏德 (Heawood) 已証出[1]，对于一个类 $g>0$ 的曲面 S（即异于球面的曲面），$\gamma(S)\leqslant n_g$。

現在来研究数 $\gamma'(S)$；林格尔 (Ringel) 已証出[2]，对于一个类 $g>0$ 的曲面 S，有

$$n_g-2\leqslant\gamma'(S)\leqslant n_g.$$

赫烏德认为总有 $\gamma'(S)=n_g$；这个猜想，在 $g=1, 2, \cdots, 7$，已于最近被赫夫退尔 (Heffter) 証出，在 $g=8, 9$，被林格尔証出，在很多特殊情况，这一猜想，也已証出。例如对于环面 $\boldsymbol{T}$，其 $g=1$，有 $\gamma'(T)=7$，一个七頂的完备图，可在环面上画出，如图 21-10 所示；另一方面，有 $\gamma(T)\leqslant 7$（赫烏德公式），于是 $\gamma(T)\geqslant\gamma'(T)=7$，最后遂得 $\gamma(T)=7$。

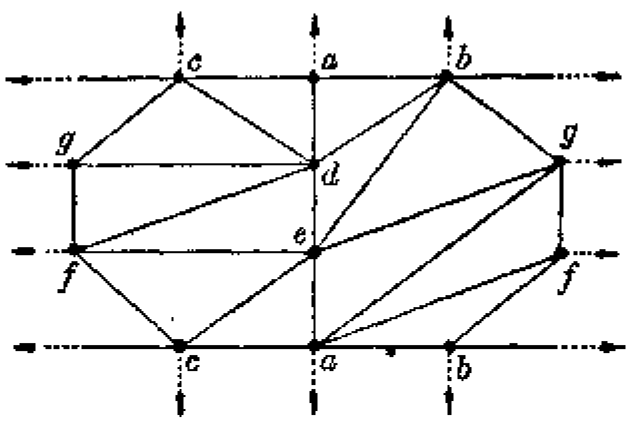


图　21-10

[1] 欲知其証，可参看：D. Hilbert et S. Cohn Vossen, Geometry and the imagination（譯本），p. 337 (New York, 1952).

[2] 参看 G. Ringel, "Farbensatz für orientare Flächen vom Geschlechte $p>0$", J. Reine, Angew. Math., **193**, 1954, p. 11.

附录 I　关于博奕一般理論的注

第 6 章已給出一个带全信息的博奕的一般定义；若对博奕者在行动上可能有的信息，不作这样的限制，则博奕的定义将变为更加复杂，但博奕规律所确定的图，仍能按同样的一般原则予以研究。

对于簡称为 (A) 与 (B) 的两个博奕者，博奕可定义如次：

1° 一个抽象集合 X，其元素为博奕的**行动**；

2° X 在其本身內的映象 Γ，称为博奕的**规律**；

3° 在 X 上的一个分划 (X_0, X_A, X_B)；假定

$$X_0=\{x/\Gamma x=\varnothing\};$$

在 X_A 的一个行动上，謂**主动**(或**博奕的輪轉**)属于博奕者 (A)，而在 X_B 的一个行动上，謂主动属于博奕者 (B)。

4° X_A 的一个分划 $\mathscr{U}=(U_1, U_2, \cdots)$ 和 X_B 的一个分划

$$\mathscr{V}=(V_1, V_2, \cdots);$$

$\mathscr{U}$ 称为博奕者 (A) 的**信息表**，$U_1\in\mathscr{U}$ 称为博奕者 (A) 的一个**信息集合**。对同一信息集合的每一行动 x，假定 Γx 有相同的个数。

5° 对每一信息集合 U，一个 U 在 X 里的单值映象族 $(\nu_h/h\in H_U)$，具性质

$$(1)\qquad h\neq k\Rightarrow \nu_h x\neq \nu_k x,$$

$$(2)\qquad x\in U\Rightarrow \{\nu_h x/h\in H_U\}=\Gamma x.$$

若 $y=\nu_h x$，称 h 为行动 y 关于 x 的**指标**。

6° 在集合 $Z=\{x/\Gamma^{-1}x=\varnothing\}$ 上，一个**基本的概率规律** $\pi_0=(\pi_0(z)/z\in Z)$。

7° 定义于 X 上的两个数值函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，称为博奕者

(A)与(B)的利益函数。

博奕的一局，按下述方式实行：初始行动x_0，依据已知的概率规律π_0在Z里随机选取；若包含x_0的信息集合U属于$\mathscr{U}$，博奕者(A)对行动x_0无所知，其所知者仅信息集合U。于此，有

$$\Gamma x_0=\{\nu_h x_0 \mid h\in H_U\}.$$

博奕者(A)在H_U里选取一个指标h，这将确定博奕的一个行动$x_1=\nu_h x_0$。若$x_1\in X_B$，博奕者(B)对前此一切毫无所知，但仅得悉博奕的行动在集合$V\in\mathscr{V}$内，須在H_V内选取一个指标k；由此引出博奕的一个新行动$x_2=\nu_k x_1$，等等。若博奕的行动x使$\Gamma x=\varnothing$，則博奕終止。

博奕者(A)的一个策略σ，按定义，是一个单值映象，使对应于$\mathscr{U}$的每一集合U，得一指标$h=\sigma U$，而$\sigma U\in H_U$；这些策略的集合記为Σ_A；若每次博奕的行动在$U\in\mathscr{U}$内，(A)总选取指标$h=\sigma U$，即謂(A)采用策略σ。

若博奕的双方，分别采用策略σ与τ，則自某一初始行动x_0出发，所得到的行动集合，是完全确定了的，这个集合記为$\langle x_0;\sigma,\tau\rangle$；博奕者$(A)$的收获，按定义是

$$f(x_0;\sigma,\tau)=\sup\{f(x)\mid x\in\langle x_0;\sigma,\tau\rangle\}.$$

博奕者(A)收获的期望值是

$$F(\sigma,\tau)=\sum_{z\in Z}\pi_0(z)f(z;\sigma,\tau).$$

同样，博奕者(B)收获的期望值是

$$G(\sigma,\tau)=\sum_{z\in Z}\pi_0(z)g(z;\sigma,\tau).$$

一个博奕者，其目的便是选择一种策略σ，使其收获的期望值，在考虑到其对手方所有可能的选擇下尽量大。

象在第6章一样，若策略对(σ_0,τ_0)满足

$$F(\sigma,\tau_0)\leqslant F(\sigma_0,\tau_0)\quad(\sigma\in\Sigma_A),$$
$$G(\sigma_0,\tau)\leqslant G(\sigma_0,\tau_0)\quad(\tau\in\Sigma_B),$$

便称(σ_0, τ_0)是一均衡点。

若策略对(σ_0, τ_0)代表博奕双方所选定的策略，则博奕的任一方单独改变其策略，均将蒙受不利。

这样一种情况，即博奕双方(A)与(B)同时选择点σ与τ，而分配給(A)以收获$F(\sigma,\tau)$，給(B)以收获$G(\sigma,\tau)$，也是一个博奕，称为原博奕的法式。

【例 1】 每一个带全信息的博奕，都是一个取离散分划

$$\mathscr{U} = \{\{x\}/x \in X_A\}$$

作为信息表的博奕。

例如抹牌，下棋等等。

【例 2】 桥牌 现在来研究在叫牌之后，南方休息，这样的一局。若用(A)記南-北方，(B)記东-西方，便得一个二人博奕。博奕者(B)虽被看成一个单独的博奕者，实际上由两个朋友所組成，二人目的一致，意見却未經过商量。Z为所有可能的不同的"出牌"集合。在某一时刻，分别在不同的手上牌的集合，記以N, S, E, O，用$\overline{R}$記已經收集起来了的牌的集合，但知每張牌出自誰手，用$\overline{T}$記在一次对抗中出在桌上的牌的集合，但也知每張牌出自誰手(若$\overline{T}=\varnothing$，則$\overline{T}$表示輪到誰出牌)。

博奕的一个行动x，由集合N, S, E, O及"定向"集合$\overline{R}$与$\overline{T}$来定义。

于此，有$f(x)=h_1(\overline{R})$，$g(x)=h_2(\overline{R})$，h_1与h_2乃与記分体系有关的两个递升函数。例如現由西面的人出牌，則包含博奕行动$x_0=(N_0, S_0, E_0, O_0, \overline{R}_0, \overline{T}_0)$的信息集合$U_0$，便是行动$(N, S, E, O, \overline{R}, \overline{T})$的集合，其中

$$O = O_0,$$
$$S = S_0,$$
$$E \cup N = E_0 \cup N_0,$$
$$\overline{T} = \overline{T}_0,$$
$$\overline{R} = \overline{R}_0.$$

【例 3】 对博奕者(B)具完全信息的博奕 若一个博奕者，在博奕进行的时候，事先就已知道博奕者(B)所能遇到的信息集合及其所选取的指标，即謂这个博奕者对博奕者(B)有一个完全信息。

若博奕者(A)对其自身有一完全信息，則称这个博奕，对于(A)是"鼓舞"的。打桥牌的那个博奕，对南-北方是鼓舞的，对东-西方則否。

混 合 策 略

为了消灭在决定过程中的詭詐，包鉼尔 (É. Borel) 引进**混合策略**概念。为了确定思維，設博奕者 (A) 的策略构成有限集合 $\Sigma_A=\{\sigma^1, \sigma^2, \cdots, \sigma^m\}$，在 Σ_A 上考虑一个概率分布 $s=\{s^k/k=1, 2, \cdots, m\}$；于是有

$$s_i^k \geqslant 0 \quad (k=1, 2, \cdots, m),$$

$$\sum_{k=1}^{m} s_i^k = 1;$$

按定义，向量 $\boldsymbol{s}=(s^1, s^2, \cdots, s^m)$ 是博奕者 (A) 的一个**混合策略**。純粹策略，譬如 σ^k，也是一个形如 $(0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ 的混合策略。

若博奕者 (A) 在 Σ_A 內任选純粹策略 σ^k，并賦以概率 s^k，便謂 (A) 使用混合策略 $\boldsymbol{s}=(s^1, s^2, \cdots, s^m)$.

現在可知这样一种作战方式，实使对方的聪明伶俐无所施其技；盖一种好的方法，使对方失敗，乃使对方在决定阶段对我方所行所为毫无所知。以下将进一步考察混合策略其他更为重要的优越性。

若 (A) 与 (B) 分别采取混合策略 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{t}$，則 (A) 的收获期望值是

$$F(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}) = \sum_{i,j} s^i t^j F(\sigma^i, \tau^j).$$

若用 S 与 T 記博奕双方的混合策略集合，可証下面的基本結論：

馮·諾曼-拿施 (Von Neumann-Nash) 定理　对混合策略，恒存在均衡点 (s_0, t_0)：

$$F(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}_0) \leqslant F(\boldsymbol{s}_0, \boldsymbol{t}_0) \quad (\boldsymbol{s} \in S),$$

$$G(\boldsymbol{s}_0, \boldsymbol{t}) \leqslant G(\boldsymbol{s}_0, \boldsymbol{t}_0) \quad (\boldsymbol{t} \in T),$$

柯恩-波尔支 (Kuhn-Birch) 定理 若博奕者(A)对其对方有完全信息，则存在一个形如(σ_0, t_0)的均衡点，其中$\sigma_0 \in \Sigma_A, t_0 \in T$。

博奕者(A)使用混合策略所能保証的最优收获期望值是

$$\alpha_0 = \max_s \min_\tau F(s, \tau).$$

使用純粹策略，則所能保証的是

$$\alpha_1 = \max_\sigma \min_\tau F(\sigma, \tau).$$

因$\Sigma_A \subset S$，故$\alpha_0 \geq \alpha_1$，且确实存在很多情况，其中$\alpha_0 > \alpha_1$；因此，混合策略的使用，較之使用純粹策略，可以保証优越。此外，尙无其他博奕方法，可以保証比使用混合策略更为优越（由于在取$G = -F$时馮·諾曼-摩根斯頓定理的証明）。

【例 1】（柯恩） 現在来研究下图所定义的博奕：于此，图(X, Γ)是一个树形图；$f(x) = -g(x)$，且其在不同終点上的值是 0, 1, −1, 2 或 −2，如图 1 所示［$f(x)$在其他顶点上的值，可以假定其等于$-\infty$，因图是有限的，这样的假定，不产生其他影响］。按自右下行或自左下行，相应地取$k=1$或 2。

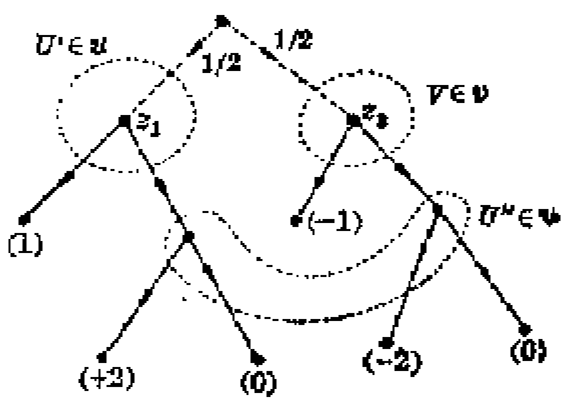


图 1

基本概率规律是$\pi_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，顶点$z_1$或$z_2$的随机选擇，具同样的概率。

实际上，这个博奕可描述如次：博奕者(A)由两个成員(A')与(A'')所組成，此二人不能直接交通，博奕者(B)只有一个成員。两張牌，一張記以"高級"，一張記以"低級"，随机分配到博奕人(A')与(B)的手中；掌握高級牌的人自掌握低級牌的人那里收进一个法郎，并能继續或停止这个博奕。若博奕继續进行，(A'')对分配情况无所知悉，可能令(A')看他的牌，也可能令(A')和博奕者(B)換牌。之后，掌握高級牌的人仍从掌握低級牌的人那里收进一个法郎。

(A)的收获期望值是

$$F(\sigma, \tau) = \frac{1}{2} f(z_1; \sigma, \tau) + \frac{1}{2} f(z_2; \sigma, \tau),$$

对于各种可能的策略，其值給出如下表：

(B) ↓ $\tau^1 V=1$　$\tau^2 V=2$

(A) →

	$\tau^1 V=1$	$\tau^2 V=2$
$\sigma^1 U'=1;\ \sigma^1 U''=1$	0	$-\frac{1}{2}$
$\sigma^2 U'=1;\ \sigma^2 U''=2$	0	$+\frac{1}{2}$
$\sigma^3 U'=2;\ \sigma^3 U''=1$	$\frac{1}{2}$	0
$\sigma^4 U'=2;\ \sigma^4 U''=2$	$-\frac{1}{2}$	0

若博奕者(A)选取一个純粹策略，他将选取 σ^2 或 σ^3，这两种策略，使其收获的保証数为零 $\left(\sigma^1 \text{与} \sigma^4 \text{只保証} -\frac{1}{2}\right)$。現在假定他选取混合策略 $s_0=\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$，即他在 σ^2 与 σ^3 之間作出等概率的机械选擇；則替代保証数 0，他的保証数是 $\frac{1}{4}$，蓋

$$F(s_0, \tau^1)=0+0+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+0=\frac{1}{4},$$

$$F(s_0, \tau^2)=0+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+0+0=\frac{1}{4}.$$

不能有更好的保証，蓋若(B)选取 $t_0=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，所期望的收获将是

$$F(s_0, t_0)=\frac{1}{4}.$$

〔注〕 一个优良(混合)策略的确定，实际是一个綫性規划。事实上，博奕者(A)能保証其收获至少为 α，当且仅当存在一个向量 $s=(s^1, s^2, \cdots, s^m)$，使

$$\begin{cases} s^i \geqslant 0 & (i=1, 2, \cdots, m), \\ \sum_{i=1}^{m} s^i=1, & \\ F(s, \tau^j) \geqslant \alpha & (j=1, 2, \cdots, n). \end{cases}$$

若取 $F(\sigma^i, \tau^j)=a_j^i$，$\frac{s^i}{\alpha}=x_i$，且設 $\alpha>0$，便得

$$\begin{cases} x_i \geqslant 0 & (i=1, 2, \cdots, m), \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{\alpha}, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_j^i x_i \geqslant 1 & (j=1, 2, \cdots, n). \end{cases}$$

現在的問題，是要求出最大的 α，使这些方程能幷存；因而这个問題轉化为求 x_i，使

$$\begin{cases} x_i \geqslant 0 & (i=1, 2, \cdots, m), \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_j^i x_i \geqslant 1 & (j=1, 2, \cdots, n), \\ \sum x_i \text{ 极小化。} \end{cases}$$

附录 II 关于运輸問題的注

能按下述形式解析表达出来的問題，統称为运輸問題：已給整数 a_i, b_j, c_j^i 与 d_j^i $(i \leqslant m, j \leqslant n)$，往求整数 ξ_j^i，使

$$(1) \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \xi_j^i = b_j & (j \leqslant n), \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j^i = a_i & (i \leqslant m), \\ 0 \leqslant \xi_j^i \leqslant c_j^i & (i \leqslant m, j \leqslant n), \end{cases}$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_j^i \xi_j^i \text{ 达到极大。}$$

这样形式的問題，在商品分配、貨物运送，消費者之間的分派等問題中經常可以遇到，甚至在某些更有理論兴趣的問題中，也經常出現。

运輸問題的形成，应归功于以下諸人，首先是希奇柯克(Hitchcock)[7]，伊于1941年形成这个問題，柯普曼(T. C. Koopman)[9]于其后数年独立地进行过研究，康脱洛維奇(Kantarovitch)[8]研究了連續的情况。事实上，蒙热(Monge)[11]早在1781年就形成了这个問題，他的研究着重于几何方面，亚配尔(Appell)[1]于

1928 年继續在这方面做过工作。

〔注 1〕 若由(1)与(2)所构成的方程組有解 ξ_i^j，則显有

(3) $$a_i\geqslant 0,\quad b_j\geqslant 0,\quad c_i^j\geqslant 0.$$

此外，将所有的 ξ_i^j 加起来，有

(4) $$\sum_{j=1}^{n} b_j=\sum_{i=1}^{m} a_i.$$

最后，取頂点 $x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n, x_0, z$，自发点 x_0 到每一点 x_i 联以容量为 a_i 的弧，自 x_i 到 y_j 联以容量为 c_i^j 的弧，自 y_j 到收点 z 联以容量为 b_j 的弧，便将这个問題和一个运輸网絡联系起来。若其是可能的，則按蓋尔定理(第 8 章)，应有

(5) $$\sum_{i=1}^{m}\min\{a_i, \sum_{j\in J}c_i^j\}\geqslant\sum_{j\in J}b_j\quad (J\subset\{1, 2, \cdots, n\}).$$

(3)，(4)，(5)是問題有解的必要条件，同时也是充分的。

〔注 2〕 耗数 d_i^j 的符号无关紧要，我們总能假定其 $\geqslant 0$. 事实上，在相反的情况，可取

$$h=-\min_{i,j} d_i^j>0,$$

$$e_i^j=d_i^j+h\geqslant 0.$$

遂有

$$\sum_i\sum_j e_i^j\xi_i^j=\sum_i\sum_j d_i^j\xi_i^j+h\sum_i a_i.$$

新問題要求极大化 $\sum_{i,j} e_i^j\xi_i^j$.

这个注也指出，不求极大而求极小，問題还是一样的。

【例 1】 (希奇柯克) 要求确定油船的綫路，已知共有 m 个发貨港口 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 及 n 个收貨港口 $y_1, y_2, \cdots, y_n$；設自 x_i 到 y_j 一条油船一趟路程的运費是 d_i^j，发貨港口 x_i 共有 a_i 条船而收貨港口 y_j 則希望收到 b_j 条船。

設用 ξ_i^j 表示自发貨港口 x_i 发送到收貨港口 y_j 的船数，要求总运費 $\sum_{i,j} d_i^j\xi_i^j$ 达到极小，便恰得上面所写出来的解析式子(其 $c_i^j=+\infty$)。

【例 2】 清除与填补問題(蒙热) 有两块地面 S 与 T，在第一块地面 S 上有許多堆物品，要求将这些堆物品迁移到地面 T 上，而使总的迁移費达到极小。

当将一个单位物品自点 $x_i \in S$ 移至点 $y_j \in T$ 的时候，取 $\xi_j^i = 1$，再設 d_j^i 表示自 x_i 到 y_j 的距离，最后将求一个形如

$$\sum_i \sum_j d_j^i \xi_j^i$$

的式子的极小。

(这儿的問題是連續的，故能将求和代以求积分。)

运用純几何推理，将見：

1° 一个单位物品，自 $x_i \in S$ 移至 $y_j \in T$，其所取的最优路徑是綫段 $x_i y_j$，任意这样两个綫段，除端点外互不相交。

2° 若存在一个凸面 R，使所有这些綫段 $x_i y_j$ 分別在 R 的諸法綫上，則这些綫段构成一个最优路徑系統。

将一箱物品一点一滴地移至另一相等的箱子里；問題和此类似。

【例 3】 **人力的最优安排**(沃多与奥尔登 Votaw et Orden) 将 n 个工人 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 安排在 n 部机器 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 上工作。工人 x_i 在机器 y_j 上工作的效果設为 d_j^i，这个数易由試驗确定。若将工人 x_i 安排在机器 y_j 上工作，取 $\xi_j^i = 1$，否則取 $\xi_j^i = 0$。这个問題归結为在約束条件

$$\sum_{j=1}^n \xi_j^i = 1, \quad \sum_{i=1}^n \xi_j^i = 1$$

下极大化总效果 $\sum_{i,j} d_j^i \xi_j^i$。

由此，恰得一个运輸問題。

【例 4】 **在运輸网絡上某种商品的分配**(奥尔登，A. Orden) 考察一个具 n 个頂点的(有向)图，其每一弧有一容量 $c_j^i = c(x_i, x_j)$，另有一个整数 $p \leqslant n$。設在每一頂点 x_i 上，其 $i \leqslant p$ 的，积存某一数量 a_i 的商品，而在其他頂点 x_i 上，其 $i > p$ 的，則需要数量 b_i 这种同样的商品。

此外，再設

$$\sum_{i \leqslant p} a_i = \sum_{j > p} b_j = h.$$

若 (x_i, x_j) 是图的一个弧，便能自 x_i 到 x_j 运送数量为 $\xi_j^i > 0$ 的商品，并設单位运价是 d_j^i。于是便能在总运费达到极小即使

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_j^i \xi_j^i$$

达到极小的情况下，滿足所有需要。

为使問題标准化，須尋求数 η_j^i，其中

$$\eta_j^i=\xi_j^i \qquad 若\ i\neq j,\ (x_i,\ x_j)\in U,$$
$$\eta_j^i=0 \qquad 若\ i\neq j,\ (x_i,\ x_j)\notin U,$$
$$\eta_j^i=h-\sum_{k\neq j}\xi_j^k \qquad 若\ i=j.$$

这些 η_j^i 滿足以下条件：

$$(1)\qquad \begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\eta_j^i=h & (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\\ \sum_{j=1}^{n}\eta_j^i=h+a_i & (i\leqslant p),\\ \sum_{j=1}^{n}\eta_j^i=h-b_i & (i>p),\\ 0\leqslant\eta_j^i\leqslant c_j^i & (i\neq j),\\ 0\leqslant\eta_j^i\leqslant h & (i=j).\end{cases}$$

要求极小化 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}e_j^i\eta_j^i$，其中

$$e_j^i\begin{cases}=0 & 若\ i=j,\\ =d_j^i & 若\ i\neq j,\ (x_i,\ x_j)\in U,\\ =+\infty & 若\ i\neq j,\ (x_i,\ x_j)\notin U.\end{cases}$$

这样便恰得欲求的形式。

【例5】 **仓庫問題**(卡恩，A. S. Cahn) 考查在某一仓庫里，在不同时刻 1, 2, …, n, 某种商品的庫存。設已知：

k＝仓庫的容量，

t_0＝初始庫存，

p_i＝在时刻 i 的(单位)卖价，

q_i＝在时刻 i 的(单位)买价，

r_i＝在时刻 i 的(单位)儲存费。

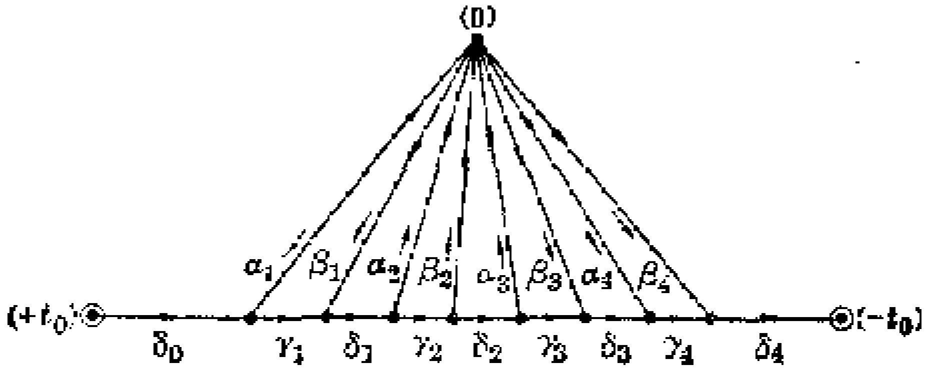


图 1

現在要求在存入仓庫初始庫存 t_0 之后，某一已知时間 n 內，核算总的利潤。求出(对每一时刻 i)：

α_i = 在时刻 i 卖出的数量，

β_i = 在时刻 i 买进的数量，

γ_i = 卖出旧貨后庫存数量，

δ_i = 买进新貨后庫存数量。

这个問題为在約束条件

$$
(1)\quad \begin{cases}
\delta_i-\alpha_{i+1}-\gamma_{i+1}=0 & (i=1,2,\cdots,n-1),\\
-\alpha_1-\gamma_1=-\delta_0, & \\
\gamma_i+\beta_i-\delta_i=0 & (i=1,2,\cdots,n-1),\\
\gamma_n+\beta_n=\delta_n, & \\
0\leqslant\alpha_i\leqslant\infty, & \\
0\leqslant\beta_i\leqslant\infty, & \\
0\leqslant\gamma_i\leqslant\infty, & \\
0\leqslant\delta_i\leqslant k &
\end{cases}
$$

下，极大化总收入 $\sum_{i=1}^{n}(p_i\alpha_i-q_i\beta_i-r_i\gamma_i)$。

这个問題可以立刻和运輸网絡上某种商品的分配問題联系起来（例 4）；在 $n=4$，相应的网絡及在不同弧上的流量，已在图 1 上表出；若商品是配給的口粮，则在时間 n 所能买进的总数量是一个已知数 r_0，遂得图 2 的图。

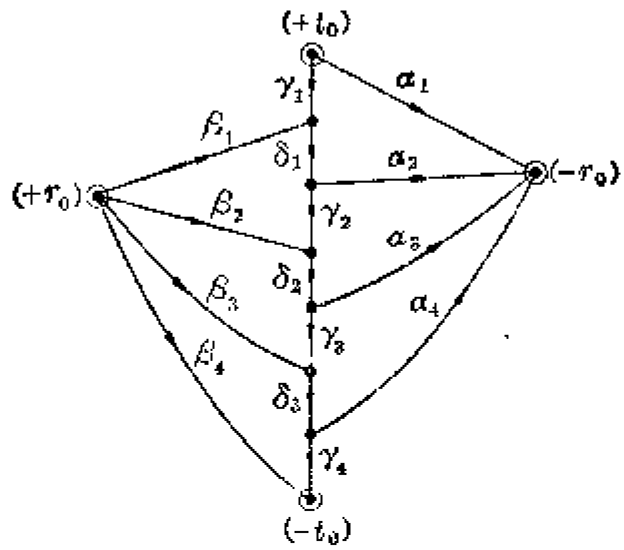


图 2

匈牙利方法

运輸問題，一如讀者可就条件 (1) 与 (2) 加以驗証，实际上是“綫性規划”的一种特殊情况；因此，这个問題可用单純型法（旦威希，G. Dantzig[3]）来求解，而图的理論，只不过給寻常的方法，提供某些适当的簡化（見[6]）。现在来扼要地叙述一种完全不同的方法，这个方法直接引用运輸网絡的理論（第 8 章），且在使用上較之单純型法特别有效。这个方法肇始于柯恩（H. Kuhn）[10]，继由福特（Ford）与傅克逊（Fulkerson）[5]及福露德（M. Flood）[4]諸人加以发揮。

§1　于此，不必重提解析方法，可以立即接触十分直观的图論观点。

现在来研究一个运輸网絡 G，这个网絡具两个互不相交的顶点集合 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 与 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$。自发点 x_0 用一条容量为 $c(x_0, x_i)=a_i$ 的弧联到每一顶点 x_i；而自每一顶点 y_j 用一条容量为 $c(y_j, z)=b_j$ 的弧，联到收点 z；最后，自每一点 x_i 用容量为 $c(x_i, y_j)=c_i^j$ 的弧联到每一顶点 y_j。求流 $\varphi(u)$ 飽和所有的端点弧，即求一个流 $\varphi(u)$，滿足以下諸式：

$$\begin{cases} 0\leqslant\varphi(u)\leqslant c(u) & (u\in U), \\ \varphi(x_0, x_i)=a_i & (i\leqslant m), \\ \varphi(y_j, z)=b_j & (j\leqslant n). \end{cases}$$

对于这样一个流 φ，其功定义为

$$d[\varphi]=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_i^j\varphi(x_i, y_j).$$

一般的运輸問題，象以前所定义的那样，为寻求一个流 φ，飽和所有的端点弧，且完成一个极大的功。

撇开这个主要問題，现在来考虑其对偶問題，所謂对偶問題，确定如次：一个函数 $\gamma(u)\geqslant 0$，定义于运輸网絡 G 的所有弧上，且

满足

(2) $\gamma(x_0, x_i)+\gamma(x_i, y_j)+\gamma(y_j, z)\geqslant d_j^i \quad (i\leqslant m, j\leqslant n)$

的，称为**預算表**。

$\gamma(u)$ 好象是在沿弧 u 运行之前，付予每一运輸工具的一笔錢；一个运輸工具，通过路 $[x_0, x_i, y_j, z]$，获得一笔款項，超过其所完成的功 d_j^i。

为了簡单起見，取

$$\gamma(x_0, x_i)=\alpha_i,$$
$$\gamma(y_j, z)=\beta_j,$$
$$\gamma(x_i, y_j)=\gamma_j^i.$$

預算表 γ 的**容量**，按定义是

$$c[\gamma]=\sum_{i=1}^{m}a_i\alpha_i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_j^i\gamma_j^i+\sum_{j=1}^{n}b_j\beta_j.$$

現在就是要寻求一个預算表 γ，具极小的容量。

引理 对每一預算表 γ 及每一流 φ，恒有

$$d[\varphi]\leqslant c[\gamma].$$

事实上，可书

$$d_j^i\varphi_j^i\leqslant\alpha_i\varphi_j^i+\gamma_j^i\varphi_j^i+\beta_j\varphi_j^i.$$

由此，遂得

$$d[\varphi]=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_j^i\varphi_j^i\leqslant\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\sum_{j=1}^{n}\varphi_j^i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j^i\varphi_j^i+\sum_{j=1}^{n}\beta_j\sum_{i=1}^{m}\varphi_j^i$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{m}a_i\alpha_i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_j^i\gamma_j^i+\sum_{j=1}^{n}b_j\beta_j=c[\gamma].$$

恰有所述的关系。

依据这个引理，若存在流 φ 及預算表 γ，使 $d[\varphi]=c[\gamma]$，便知 φ 就是所欲求的流。

§2 为了簡化計算，假定所有的 c_j^i 都是无穷；由此推出 γ_j^i 都是零。对偶問題乃化为求 $\alpha_i\geqslant0$ 与 $\beta_j\geqslant0$，满足

$$\alpha_i+\beta_j \geqslant d_j^i \quad (i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n).$$

除主要問題与对偶問題之外，再来考虑一个輔助問題，这个問題，确定如次：对应于每一預算表 γ，自 G 出发，去掉所有

$$\alpha_i+\beta_j > d_j^i$$

的弧 (x_i, y_j)，以作出一个輔助网絡 $\bar{G}_\gamma$.

于是問題轉化为求运輸网絡 $\bar{G}_\gamma$ 的极大流。

定理 1　若对于一个預算表 γ，图 $\bar{G}_\gamma$ 具有流 $\bar{\varphi}$ 飽和所有的端点弧，則 γ 是具极小容量的預算表，而 $\bar{\varphi}$ 是 G 的一个完成极大功的流。

$\bar{\varphi}$ 显是网絡 G 的一个流，且飽和 G 的所有端点弧。其功是

$$d[\bar{\varphi}]=\sum_{\alpha_i+\beta_j=d_j^i} d_j^i \bar{\varphi}_j^i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (\alpha_i+\beta_j)\, \bar{\varphi}_j^i$$

$$=\sum_{i=1}^{m} a_i\alpha_i+\sum_{j=1}^{n} b_j\beta_j=c[\gamma].$$

依据引理，$\bar{\varphi}$ 恰是 G 的一个完成极大功的流，而 γ 恰是具极小容量的預算表。

定理 2　若对于預算表 γ，网絡 $\bar{G}_\gamma$ 沒有流飽和所有的端点弧，則能求得一个新預算表 γ'，其容量 $c[\gamma']<c[\gamma]$.

事实上，考察一个不飽和 $\bar{G}_\gamma$ 端点弧的极大流 $\bar{\varphi}$；根据福特和傅克逊定理，这个流的值等于一个极小截集 $U_{\bar{A}}$ 的容量。設

$$A=\{x_1, x_2, \cdots, x_r, y_1, y_2, \cdots, y_s, z\}.$$

因 $U_{\bar{A}}$ 是一个具极小容量的截集，自不能包含容量为 ∞ 的弧；于是 $i>r$, $j\leqslant s$ 导致 (x_i, y_j) 不是 $\bar{G}_\gamma$ 的弧，即

$$\alpha_i+\beta_j > d_j^i.$$

另一方面，可以假定所有的 α_i 都 >0，或所有的 β_j 都 >0，蓋在相反的情况，将对指标对 (i, j) 得等式

$$d_j^i=\alpha_i+\beta_j=0.$$

設

$$\alpha_i > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

取

$$\alpha'_i = \begin{cases} \alpha_i & 若 i \leqslant r, \\ \alpha_i - 1 & 若 i > r. \end{cases}$$

$$\beta'_j = \begin{cases} \beta_j & 若 j \leqslant s, \\ \beta_j + 1 & 若 j > s. \end{cases}$$

兹往証 α'_i 与 β'_j 恰构成預算表 γ'；若 $i > r$, $j \leqslant s$, 則有 $\alpha_i + \beta_j > d^i_j$, 故

$$\alpha'_i + \beta'_j \geqslant d^i_j.$$

另一方面，若 $i > r$, 有 $\alpha_i > 0$, 故

$$\alpha'_i \geqslant 0.$$

新預算表的容量是

$$c[\gamma'] = \sum_{i=1}^{m} a_i \alpha'_i + \sum_{j=1}^{n} b_j \beta'_j = c[\gamma] - \sum_{i=r+1}^{m} a_i + \sum_{j=s+1}^{n} b_j.$$

由此，

$$c[\gamma] - c[\gamma'] = \sum_{i=1}^{m} a_i - \left(\sum_{i=1}^{r} a_i + \sum_{j=s+1}^{n} b_j\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i - \overline{\varphi}_z > 0.$$

新預算表的容量，确比旧的为小，定理得証。

寻找一个完成极大功的流的法則，便可总結如次：自

$$\alpha_i = \min_j d^i_j,$$

$$\beta_j = \max_i (d^i_j - \alpha_i),$$

$$\gamma^i_j = 0$$

所定义的預算表 γ 出发，寻求网絡 $\overline{G}_\gamma$ 的极大流，若这个流不飽和所有的端点弧，自此推出新預算表 γ'，重复上面的做法；若这个流飽和所有的端点弧，則这个流便是所欲求的解。

§3 若不复假定所有的 c^i_j 都是无限的，則須將数 γ^i_j 考虑在

内，但总可假定

$$\gamma_j^i=\max\{0,\ d_j^i-\alpha_i-\beta_j\}.$$

于是有三种情况，須予研究：

1°　　$\gamma_j^i=0,\ d_j^i=\alpha_i+\beta_j$　　（或：$(i,\ j)\in P$），

2°　　$\gamma_j^i=0,\ d_j^i<\alpha_i+\beta_j$　　（或：$(i,\ j)\in Q$），

3°　　$\gamma_j^i>0,\ d_j^i=\alpha_i+\beta_j+\gamma_j^i$　　（或：$(i,\ j)\in R$）.

和上面一样，定义运输网絡 $\overline{G}_\gamma$，这个网絡和 G 有同样的弧，而其容量是

$$\bar{a}_i=a_i-\sum_{j/(i,j)\in R}c_j^i\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m),$$

$$\bar{b}_j=b_j-\sum_{i/(i,j)\in R}c_j^i\qquad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

$$\bar{c}_j^i=\begin{cases}c_j^i & \text{若}\quad (i,\ j)\in P,\\ 0 & \text{若}\quad (i,\ j)\in Q\cup R.\end{cases}$$

定理 1′　若对预算表 γ，网絡 $\overline{G}_\gamma$ 有流 $\bar{\varphi}$，饱和所有的端点弧，則 γ 是具极小容量的预算表，而对网絡 G，完成极大功的流 φ，可由下式来确定：

$$\varphi=\begin{cases}\bar{\varphi}_j^i & \text{若}\quad (i,\ j)\in P\cup Q,\\ c_j^i & \text{若}\quad (i,\ j)\in R.\end{cases}$$

事实上，

$$\begin{aligned}d[\varphi]&=\sum_{(i,j)\in P\cup Q}d_j^i\bar{\varphi}_j^i+\sum_{(i,j)\in R}d_j^ic_j^i\\&=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n(\alpha_i+\beta_j)\bar{\varphi}_j^i+\sum_{(i,j)\in R}d_j^ic_j^i\\&=\sum_{i=1}^m\alpha_i\bar{a}_i+\sum_{j=1}^n\beta_j\bar{b}_j+\sum_{(i,j)\in R}d_j^ic_j^i\\&=c[\gamma]-\sum_{i=1}^m\alpha_i\sum_{j/(i,j)\in R}c_j^i-\sum_{j=1}^n\beta_j\sum_{i/(i,j)\in R}c_j^i-\sum_{(i,j)\in R}\gamma_j^ic_j^i\\&\quad+\sum_{(i,j)\in R}(\alpha_i+\beta_j+\gamma_j^i)c_j^i=c[\gamma].\end{aligned}$$

遂有 $d[\varphi]=c[\gamma]$，据引理，φ 是所欲求的流。

定理 2′ 若对于預算表 γ，网絡 $\overline{G}_\gamma$ 不具有流 $\overline{\varphi}$，飽和所有的端点弧，則能求得一个新預算表 γ'，其容量 $c[\gamma']<c[\gamma]$。

事实上，設 $\overline{\varphi}$ 是 $\overline{G}_\gamma$ 的一个极大流，按假設这个流不飽和所有的端点弧，現在来研究具性质

$$c(U_A^-)=\overline{\varphi}_z<\sum_{i=1}^{m}\overline{a}_i$$

的一个集合

$$A=\{x_1, x_2, \cdots, x_r, y_1, y_2, \cdots, y_s, z\}.$$

象在定理 2 一样，可以假定所有的 α_i 都 >0。然后取

$$\alpha_i'=\begin{cases}\alpha_i & \text{若 } i\leqslant r,\\ \alpha_i-1 & \text{若 } i>r,\end{cases}$$

$$\beta_j'=\begin{cases}\beta_j & \text{若 } j\leqslant s,\\ \beta_j+1 & \text{若 } j>s,\end{cases}$$

$$\gamma_j''^i=\begin{cases}\gamma_j^i-1 & \text{若 } i\leqslant r,\ j>s,\ (i, j)\in R,\\ \gamma_j^i+1 & \text{若 } i>r,\ j\leqslant s,\ (i, j)\in R\cup P,\\ \gamma_j^i & \text{在其他一切情况。}\end{cases}$$

首先来驗証这些新数确实定义一个預算表；我們有 $\alpha_i'\geqslant 0$，$\beta_j'\geqslant 0$，$\gamma_j''^i\geqslant 0$。为了驗証 $\alpha_i+\beta_j+\gamma_j^i-d_j^i\geqslant 0$ 总成立，可研究表 1 上的变动 Δ：

表 1

	P $i\leqslant r$ $j\leqslant s$	P $i\leqslant r$ $j>s$	P $i>r$ $j\leqslant s$	P $i>r$ $j>s$	Q $i\leqslant r$ $j\leqslant s$	Q $i\leqslant r$ $j>s$	Q $i>r$ $j\leqslant s$	Q $i>r$ $j>s$	R $i\leqslant r$ $j\leqslant s$	R $i\leqslant r$ $j>s$	R $i>r$ $j\leqslant s$	R $i>r$ $j>s$
$\Delta\alpha_i$	0	0	−1	−1	0	0	−1	−1	0	0	−1	−1
$\Delta\beta_j$	0	+1	0	+1	0	+1	0	+1	0	+1	0	+1
$\Delta\gamma_j^i$	0	0	+1	0	0	0	0	0	0	−1	+1	0
$\Delta=$	0	+1	0	0	0	+1	−1	0	0	0	0	0

唯一的情况 $\Delta=-1$ 是沒有关系的，盖对 $(i, j)\in Q$，有

$$\alpha_i+\beta_j+\gamma_j^i-d_j^i>0.$$

現在来驗証預算表的容量已減小；于此，有

$$c[\gamma']=\sum_i a_i\alpha'_i+\sum_j b_j\beta'_j+\sum_{i,j} c_j^i\gamma'^i_j=c[\gamma]-\sum_{i>r} a_i+\sum_{j>s} b_j$$

$$-\sum_{\substack{i\leqslant r\\ j>s\\ R}} c_j^i+\sum_{\substack{i>r\\ j>s\\ P}} c_j^i+\sum_{\substack{i>r\\ j\leqslant s\\ R}} c_j^i.$$

故

$$c[\gamma']-c[\gamma]=-\sum_{i>r}\bar{a}_i+\sum_{j>s}\bar{b}_j+\sum_{\substack{i>r\\ j\leqslant s}}\bar{c}_j^i=-\sum_i\bar{a}_i+\bar{c}(U_{\Delta})<0.$$

定理証完。

〔注〕 若有数 $c''^i_j\geqslant c'^i_j\geqslant 0$，則可加进条件

$$c'^i_j\leqslant\varphi_j^i\leqslant c''^i_j\quad(i\leqslant m,\ j\leqslant n),$$

將問題推广。

在这种情况，問題归結为 p. 86 上所定义輔助网絡 $\bar{G}$ 里的一个古典运輸問題；在一切这些情况，用以解决問題的是 p. 246 上那个方法。

附录 III 关于位势概念使用于运输网絡的注

已給一个連接图 $G=(X, U)$，对每一点 $x\in X$，給定一个正或負的数 $q(x)$，称为在頂点 x 上的**积存**。定义于所有弧 $u\in U$ 上的函数 $\varphi(u)$，若滿足下二条件：

1° $\qquad\varphi(u)\geqslant 0\quad(u\in U)$，

2° $\qquad\sum_{u\in U_x^-}\varphi(u)-\sum_{u\in U_x^+}\varphi(u)=q(x)\quad(x\in X)$，

称为**和积存 $q(x)$ 能相容的流**。

（在第 8 章所研究的运輸网絡里，除发点 x_0 和收点 z，其积存未知外，其他各点积存皆为零。）

若 $\mu=(u_1, u_2, \cdots)$ 是图的一个圈，μ 的所有弧，其方向与 μ

的走向相同的，記以 $V'(\mu)$，而与 μ 的走向相反的，記以 $V''(\mu)$。确定于一切弧 $u\in U$ 上的函数 $\pi(u)$，若对每一个圈 μ，能有

$$(1)\qquad \sum_{u\in V'(\mu)}\pi(u)-\sum_{u\in V''(\mu)}\pi(u)=0,$$

按定义，称为**位勢差**。

〔注 1〕 若关系(1)对某一基底所有的圈 μ 都成立，则对图的一切圈也成立。

〔注 2〕 若存在一个位勢差 $\pi(u)$，便能在 X 上定义一个函数 $p(x)$，使对一切弧 $u=(x, y)$，满足

$$(2)\qquad \pi(u)=\pi(x, y)=p(x)-p(y).$$

事实上，只須任取一个頂点 $x_0\in X$，对于这点取 $p(x_0)=0$，然后确定和 x_0 相邻各点 x 的值 $p(x)$，再确定和这些点中某一点相邻的各点的值，等等，因图是連接的，故最后終能一步一步地在全部 X 上定义出 $p(x)$。此外，由于(1)，在每一点 x 上，这样获得的值是唯一的。

反之，若 $p(x)$ 是定义于 X 上的一个函数，显見 $\pi(x, y)=p(x)-p(y)$ 是一个位勢差。函数 $p(x)$，按定义，是图的**位勢函数**。

在以下所要研究的絕大部分問題里，将再給出一个函数 $r(u)$，确定于每一条弧 $u\in U$ 上，称为弧 u 的**阻力**，函数 $c(u)=\dfrac{1}{r(u)}$ 定义为弧 u 的**导量**。

狄力希腊特(Dirichlet)問題 在一个已知图里，要求确定一个流 φ，和已給的积存相容，且对这个流，$\pi(u)=r(u)\varphi(u)$ 是一个位勢差。

狄力希腊特-諾曼(Dirichlet-Neumann)問題 在一个已知图里，要求确定一个流 φ，使 $\pi(u)=r(u)\varphi(u)$ 是一个位勢差，且对这个流，在某些頂点，积存 $g(x)$ 是固定的，而在其他頂点，位勢 $p(x)$ 是固定的。

这些問題，首先出現于电网的研究中，但也同样出現于大量純数学領域和运筹学里。故于此，有責任給出某些簡单而易于应用的結果。

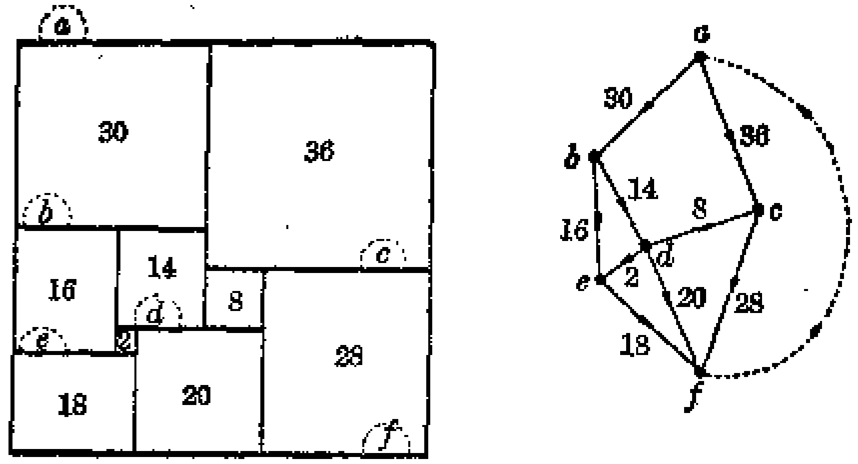


图　1

【例 1】分矩形成方块　已給一个矩形，要求将其分成 n 个方块，使分割出来的每二方块，都沒有相同的維数。若一个矩形，能做这样的分割，便称之为 n 阶的完美矩形。很长一个时期，人們认为根本不存在完美矩形。莫郎(Moron)于 1925 給出第一个例，斯普拉格(Sprague)創立了一般理論，继續研究加以发展的，有布洛克斯(Brooks)，史密斯(Smith)，史屯(Stone)及涂特(Tutte)[2]諸氏。

可注意的是，联系每一完美矩形，恒有一个图 G (其頂点是方块的横边)，象在图 1 和 2 那样。这个图 G 具有一些突出的特性：它是平面的，絕对連接的，和不可断的；尤有进者，在图 G 上存在流 $\varphi(u)$，位势差 $\pi(u)=\varphi(u)$，且在不同的弧上，φ 的値都不相同。

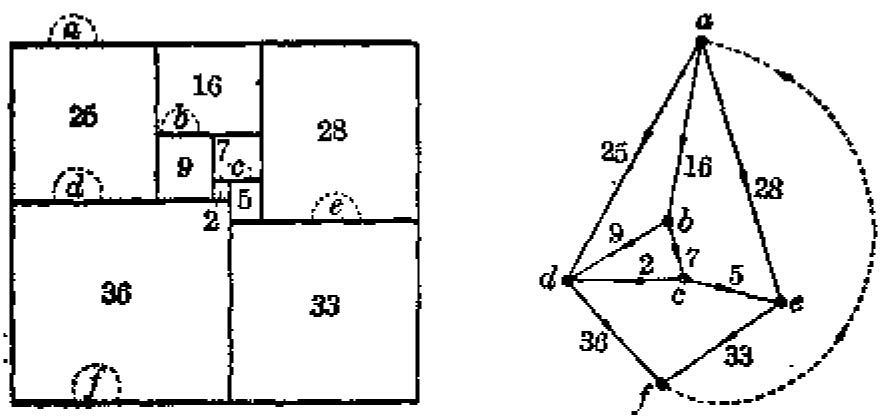


图　2

寻求一个 n 阶的完美矩形，归結为在 k 个頂点的完备图里，寻求一个部分图，对于这个部分图，带阻力函数 $r(u)=1$ 的狄力希腊特問題有解，其在各个弧上的値各不相同。

当 $n<9$，不存在 n 阶的完美矩形，在 $n=9$，恰存在两个完美矩形，为上面的图 1 和 2 所給出。

【例 2】（經济学） 某一簡化了的經济模型，可描述如次：用点来表示不同的工业 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 及不同的产品 $y_1, y_2, \cdots, y_l$，若工业 x_i 为了制造产品 y_3 与 y_4 而消耗产品 y_1 与 y_2，作弧

$$(y_1, x_i),\quad (y_2, x_i),\quad (x_i, y_3),\quad (x_i, y_4).$$

若 $(y_j, x_i)\in U$，则其导量为 $c_j^i<0$，其中 $|c_j^i|$ 是工业 x_i 按一个单位强度运轉时消耗产品 y_j 的数量；若 $(x_i, y_j)\in U$，则其导量为 $c_j^i>0$，其中 c_j^i 是工业 x_i 按一个单位强度运轉时制造产品 y_j 的数量。

設对每一 j，产品 y_j 的原始存量是 α_j，現欲将其轉变成 β_j，为了达到这样的目的，問各种工业須开动到什么样的强度？

取

$$\begin{cases} q(y_j)=\alpha_j-\beta_j, \\ p(y_j)=0. \end{cases}$$

若存在流 φ 滿足这些等式，而且导量 c_j^i，则 $p(x_i)$ 便是所欲求的工业 x_i 的强度。若 $u=(y_j, x_i)\in U$，则工业 x_i 消耗产品 y_j 的数量是

$$\varphi(y_j, x_i)=p(x_i)(-c_j^i)=c_j^i[p(y_j)-p(x_i)].$$

若 $(x_i, y_j)\in U$，则由工业 x_i 制造出来的产品 y_j 的数量是

$$\varphi(x_i, y_j)=p(x_i)c_j^i=c_j^i[p(x_i)-p(y_j)].$$

因此，这是一个狄力希腊特-諾曼問題。

带阻力函数 $r(u)\geq 0$ 的狄力希腊特問題

为了簡单起見，取 $r(u_j)=r_j$，$c(u_j)=c_j$，$p(x_i)=p_i$，$q(x_i)=q_i$，$\varphi(u_j)=\varphi_j$，$\pi(u_j)=\pi_j$；茲往考察向量 $\boldsymbol{p}=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$，$\boldsymbol{q}=(q_1, q_2, \cdots, q_n)$，$\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m)$ 及 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_m)$。

現在須使用关于弧的投射矩陣 $S=(s_j^i)$，其中

$$s_j^i\begin{cases} =0 & \text{若 } x_i \text{ 不是 } u_j \text{ 的端点,} \\ =+1 & \text{若 } x_i \text{ 是 } u_j \text{ 的起点,} \\ =-1 & \text{若 } x_i \text{ 是 } u_j \text{ 的終点。} \end{cases}$$

也須使用对角矩陣 $C=(c_j^i)$，其中

$$c_j^i\begin{cases}=0 & 若\ i\neq j,\\ =c_j & 若\ i=j.\end{cases}$$

若 $u_j=(x_1, x_2)$ 是图的一条弧，可书

$$\pi_j=\pi(u_j)=p(x_1)-p(x_2)=\sum_i s_j^i p_i=\langle \boldsymbol{s}_j, \boldsymbol{p}\rangle,$$

$$q_i=q(x_i)=\sum_j s_j^i\varphi(u_j)=\langle \boldsymbol{s}^i, \boldsymbol{\varphi}\rangle.$$

于是有

$$(1)\qquad \begin{cases}\boldsymbol{\pi}=S^*\boldsymbol{p},\\ \boldsymbol{q}=S\boldsymbol{\varphi},\\ \boldsymbol{\varphi}=C\boldsymbol{\pi}.\end{cases}$$

定理 1　带阻力函数 $r(u)>0$ 的狄力希腊特問題有一个且仅一个解 φ.

1° 唯一性　事实上，設有两个流 φ 与 φ' 都滿足所提出的問題；对应于流 φ'，有一个积存 $\boldsymbol{q}'$，位势差 $\boldsymbol{\pi}'$，及位势函数 $\boldsymbol{p}'$，而 $\boldsymbol{q}'\equiv\boldsymbol{q}$. 由此

$$\begin{aligned}\sum_j c_j(\pi_j-\pi_j')^2&=\sum_j(c_j\pi_j-c_j\pi_j')(\pi_j-\pi_j')\\ &=\sum_j(\varphi_j-\varphi_j')\left[\sum_i s_j^i(p_i-p_i')\right]\\ &=\sum_i(p_i-p_i')\left[\sum_j s_j^i(\varphi_j-\varphi_j')\right]\\ &=\sum_i(p_i-p_i')(q_i-q_i')=0.\end{aligned}$$

因 $c_j>0$ 对所有的 j 都成立，故 $\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}'$，因而

$$\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}'.$$

2° 存在性　求解的問題是：已給向量 $\boldsymbol{q}=(q_1, q_2, \cdots, q_n)$，要求向量 $\boldsymbol{p}=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$，使

$$\boldsymbol{q}=S\boldsymbol{\varphi}=SC\boldsymbol{\pi}=SCS^*\boldsymbol{p}.$$

这是一个 n 个方程含 n 个未知量的綫性方程組，若其解存在，則該解是唯一的。这个方程組有解，当且仅当

$$\mathrm{Det}\,(SCS^*)\neq 0.$$

按套斯基(Olga Taussky)关于行列式的一个定理，这个关系式可以立即得到驗証[7][1]。

对某一集合 $A\subset X$，給定积存函数 $q(x)$，而对集合 $X-A$ 給定位势 $p(x)$，在这样一个狄力希腊特-諾曼問題里，其唯一性可論証如上，而其存在性，則已由杜芬(Duffin)用另一种方法加以証明[3]。

定理 2 已給积存 $q_1, q_2, \cdots, q_n$，設 Φ 是和其相容的流 φ 的集合，并設 $r_1, r_2, \cdots, r_m\geqslant 0$；則使 $\sum r_j(\varphi_j)^2$ 取极小值的流 $\varphi\in\Phi$ 唯一确定，且这个流就是狄力希腊特問題(确定于定理 1)的解。

用 φ 記狄力希腊特問題的解，用 φ' 記 Φ 的任一流，取 $\varphi'(u)=\varphi(u)+\varepsilon(u)$。則

$$\begin{aligned}\sum_j r_j(\varphi'_j)^2&=\sum_j(r_j\varphi_j^2+2r_j\varphi_j\varepsilon_j+r_j\varepsilon_j^2)\\&=\sum_j r_j\varphi_j(\varphi_j+2\varepsilon_j)+\sum_j r_j(\varepsilon_j)^2\\&=\sum_j\pi_j\varphi_j+2\sum_j\pi_j(\varphi'_j-\varphi_j)+\sum_j r_j(\varepsilon_j)^2.\end{aligned}$$

但

$$\sum_j\pi_j\varphi_j=\sum_j\varphi_j\Big(\sum_i s_j^i p_i\Big)=\sum_i p_iq_i.$$

同样

$$\sum_j\pi_j\varphi'_j=\sum_i p_iq_i.$$

由是，乃有

$$\sum_j r_j(\varphi'_j)^2=\sum_i p_iq_i+\sum_j r_j(\varepsilon_j)^2.$$

由这个等式，可見极小值的获得，乃取 $\varepsilon=0$ 的，即取 $\varphi'=\varphi$ 的。

---

[1] 方程組的实际求解，是电学上的一个古典問題，使用图論的克劳恩(Kron)方法，比較有利；参看：P. Le Corbeiller, Analyse matricielle des réseaux électriques, p. 83 (Dunod, éd.).

柯普曼問題

现在来研究港口 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的集合及航綫 $u_1, u_2, \cdots, u_m$。設 $d_j=d(u_j)$ 是一条不定期海輪在航綫 u_j 上空駛所費时間，并設 $q_i=q(x_i)$ 是港口 x_i 空船的平均积存；若 $q_i>0$，則駛进港口 x_i 的多于駛出，故必須将多余的空船开向其他港口。設 $\varphi_j=\varphi(u_j)$ 为沿弧 u_j 航行的空船只数。問題是要确定流 φ，与积存 q_i 相容，而使这样安排的总費用达到极小，这笔总費用，除一常数因子外，是

$$\sum_{j=1}^{m} d_j\varphi(u_j)=\langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{\varphi}\rangle.$$

仔細分析，这个問題实可列入运輸問題的一般类型里去，其解法已給出如前(見附录 II 例 4)。但位势函数的引用及对电路网絡的模拟，将提供一种与前略异的解法。

設 U 是所有須加研究的航綫(带方向)，(X, U) 是相应的图。

若存在一个流 φ 和积存 q_i 相容，且对这个流 $\langle \boldsymbol{d}, \boldsymbol{\varphi}\rangle$ 取极小值，并满足

$$\varphi(u)>0, \text{ 若 } u\in V,$$
$$\varphi(u)=0, \text{ 若 } u\in U-V,$$

便称部分图 (X, V) 是一个**最优負荷**。

定理 3 若 (X, V) 是一个最优負荷，則对 $x\in X$，存在数 $p(x)$，满足：

$$(1)\qquad \begin{cases} d(x, y)\geqslant p(y)-p(x) & \text{若}(x, y)\in U, \\ d(x, y)=p(y)-p(x) & \text{若}(x, y)\in V. \end{cases}$$

設 (X, V) 是一个最优負荷，而 φ 是相应的流。可以假定图 (X, V) 是連接的(最多也不过分別考慮其每一分图)。在这个負荷上任取一頂 x_0，并取 $p(x_0)=0$；若 $(x, x_0)\in V$，取

$$p(x)=p(x_0)-d(x, x_0),$$

若 $(x_0, y) \in V$，則取

$$p(y)=p(x_0)+d(x_0, y).$$

每一次将在图的一个頂点上定出 p. 按照这个方式，能标出所有其他相邻的頂点（尚未标記的），因而便能一步一步地在 X 里定出 p.

設存在一条具性质

$$d(x, y)<p(y)-p(x)$$

的弧 $u=(x, y) \in U$，茲往証其将导致矛盾；弧 u 构成过 x_0 形如

$$\mu=[x_0, x_1, \cdots, x_{l-1}=x, x_l=y, \cdots, x_k=x_0]$$

的一个圈的一部分，其中

$$(x_i, x_{i-1}) \text{ 或 } (x_{i-1}, x_i) \in V, (i \neq l, i \leqslant k).$$

用 $V'(\mu)$ 記 μ 的所有方向和走向相同的弧，$V''(\mu)$ 記所有方向和走向相反的弧，并考察由以下各式所定义的流 ψ：

$$\psi(u)=\varphi(u)+1 \quad \text{若 } u \in V'(\mu),$$

$$\psi(u)=\varphi(u)-1 \quad \text{若 } u \in V''(\mu),$$

$$\psi(u)=\varphi(u) \quad \text{若 } u \notin V'(\mu), u \notin V''(\mu).$$

这个流 ψ 总与积存相容，但較 φ 更为有利，盖用这个流，已节約了等于

$$\sum_{u \in V''(\mu)} d(u)-\sum_{u \in V'(\mu)} d(u)$$

$$=-d(x, y)+p(x_0)-p(x_1)+p(x_1)-p(x_2)+\cdots$$

$$=-d(x, y)+p(y)-p(x)+0>0$$

的费用。

这和 φ 的最优性相矛盾。

同样可以驗証不存在弧 $v=(x, y) \in V$，使

$$d(x, y)>p(y)-p(x).$$

于是恰有(1)。

定理 6 若 (X, V) 是与积存相容的流 φ 的負荷，且存在数

$p(x)$满足 (1)，則流 φ 是一个最优流。

于此，有

$$\sum_{u\in U} d(u)\varphi(u) = \sum_{u_j\in V} d(u_j)\varphi(u_j) = -\sum_{u_j\in V}\varphi(u_j)\Big(\sum_{i=1}^{n} s_j^i p_i\Big)$$

$$= -\sum_{i=1}^{r} p_i\Big(\sum_{j=1}^{m} s_j^i \varphi_j\Big) = -\sum_{i=1}^{r} p_i q_i.$$

对于与积存相容的任意流 ψ，則有

$$\sum_{u\in U} d(u)\psi(u) \geqslant -\sum_{j=1}^{m}\psi_j\Big(\sum_{i=1}^{n} s_j^i p_i\Big)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} p_i\Big(\sum_{j=1}^{m} s_j^i \psi_j\Big) = -\sum_{i=1}^{n} p_i q_i.$$

故流 φ 恰为一个最优流，而 (X, V) 恰为一个最优負荷。

这些結果，提供一种极为一般的方法，以解决这样类型的問題。作一个反对称的运輸网絡 (X, V)，尽可能地逼眞，在这个网絡上探索 $\pi(x, y) = -d(x, y)$ 是否为一位势差。任取一个頂点 x_0，并取 $p(x_0)=0$；用迭代方法，在每一頂点 x 上，标記一个值 $p(x)$ 如次：若 x_1 是一个标記了的点，用

$$p(y) = p(x_1) + d(x_1, y) \quad 若\ (x_1, y)\in V,$$

$$p(y) = p(x_1) - d(x_1, y) \quad 若\ (y, x_1)\in V$$

来标記頂点 y (尙未标記的)。

若存在弧 $(x, y)\in V$，且使 $p(y)-p(x)<d(x, y)$，自所取的运輸网絡消去这个弧。若存在弧 $(x, y)\in U$，使 $p(y)-p(x) > d(x, y)$，用"回流"的方法，改进运輸网絡的图形(参看定理 3)。按照这样的办法，迟早总会有

$$p(y)-p(x) = d(x, y) \quad 若\ (x, y)\in V,$$

$$p(y)-p(x) < d(x, y) \quad 若\ (x, y)\in U-V.$$

此时便甚易驗証新的运輸网絡 (X, V) 是否有流与积存相容，而作出这个流的一般方法，則早已給出(第 16 章，p. 161)。

象柯普曼与莱退尔(Koopmans et Reifer)那样，将这个方法应用于1913年的世界港口动态作为一例，得图 3。

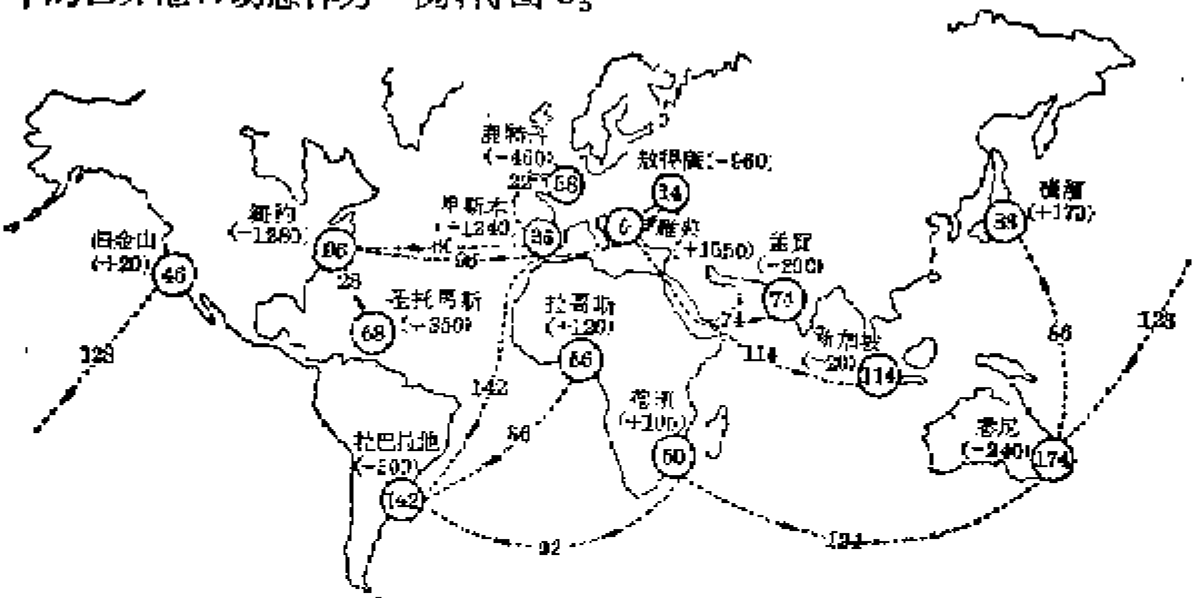


图 3 1913 年空船航駛的最优路綫图[1]

虛綫上的数：航程时間 $d(x, y)$，单位 $\frac{1}{10}$ 月[2]。$\pi(x, y)=-d(x, y)$ 是一个位势差；港口 x 旁圈以小圈的数：$p(x)$ 的値；括号里的数：每月空船平均积存，单位千吨，即 $q(x)$。

这里的运輸网絡是一个树，按第 16 章定理 2，这个树包含一条悬挂弧，这条弧上的流，按唯一方法确定，故能去掉这条弧(在修正其端点上积存的条件下)。在所得的新树上重复这一工作，便一步一步地得到：

φ(横濱，悉尼) = 170	q(悉尼) = −240 + 170 = −70
φ(旧金山，悉尼) = 20	q(悉尼) = −70 + 20 = −50
φ(德班，悉尼) = 50	q(德班) = 100 − 50 = +50
φ(德班，拉巴拉他) = 50	q(拉巴拉他) = −300 + 50 = −250
φ(拉哥斯，拉巴拉他) = 120	q(拉巴拉他) = −250 + 120 = −130
φ(雅典，拉巴拉他) = 130	q(雅典) = 1550 − 130 = +1420
φ(雅典，敖得薩) = 960	q(雅典) = 1420 − 960 = 460
φ(雅典，孟买) = 290	q(雅典) = 460 − 290 = 170
φ(雅典，新加坡) = 20	q(雅典) = 170 − 20 = 150
φ(雅典，紐約) = 150	q(紐約) = −1280 + 150 = −1130
φ(圣托馬斯，紐約) = 350	q(紐約) = −1130 + 350 = −780

(1) 这个图，在原著者的許可下，取自[4]。

(2) 按原文图，应改作"单位 1/100 月"。——譯者注

φ(里斯本,紐約) = 780 q(里斯本) = 1240 − 780 = 460

φ(里斯本,鹿特丹) = 460 q(鹿特丹) = 0

这样确定的流 φ,使空駛費用达到极小;显然,在这个問題里,假定所有船只吨位都是一样的。

附录 IV 沒有解决的問題和沒有証明的猜想

以下所列出来的沒有解决的問題,对于我們似乎特别重要。

1. 第四章 少女問題(p. 41)引起了另一問題,虽以席渭斯特尔,凱萊,及若干近代代数学家的才能,仍未能予以解决:在注意到三人組的个数是 $7\times5\times13$ 之后,席渭斯特尔提出,是否可让这个学校,按下列方式,継續鍛炼 13 周:

1° 每周,任二少女联在一起一次且仅一次;

2° 在 13 周之后,任三少女联在一起一次且仅一次。

若研究图 G,其顶点是 455 个可能的三人組,其边联接两个仅有一人相异的三人組,则这个問題归結为証明图 G 的色数恰为 13;这个数在任何情况都不能超过 13,而关于"9 个貴妇"問題,有一相似猜想,已能加以証明。使用高莫蜕法則,p. 38 上的注及一架近代計算机器,无疑能将上面所提出的席渭斯特尔猜想予以肯定或否定。

再应提起注意的,三人組的問題,在"实驗設計"(plans d'expérience)理論里相当重要,且按下列方式推广为:設 $p\leqslant k\leqslant m$,一个集合族 $\mathscr{S}$,其中每一集合,都有 k 个元素,且均含在另一 m 个元素的集合 E 里,又每一 $P\subset E$,其 $|P|=p$ 的,則恰含在一个这样的集合 $S\in\mathscr{S}$ 里,則集合族 $\mathscr{S}$ 称为 $k-p-m$ 系統。已知(施太內尔,Steiner) $4-3-m$ 系統存在,当且仅当

$$m\equiv2 \text{ 或 } 4 \pmod 6)。$$

同样，知(莫尔，E. M. Moore) $3-2-m$ 系統存在，当且仅当

$$m=1 \text{ 或 } 6 \pmod 6).$$

哈拿匿(H. Hanani)已于最近給出一个不带归納的构造性証明(即发表于 Proc. Int. Congress Math., 1958)。

2. 可以証明，若 G 是一个有限图，数 $\sqrt[n]{\alpha(G^n)}$ 有一个有限的上界；这个上界似乎总能作为极限被达到，但尚未能予以証明。又若 $\theta(G)\neq\alpha(G)$，則对于无限个 n 的值，有 $\sqrt[n+1]{\alpha(G^{n+1})}-\sqrt[n]{\alpha(G^n)}>0$，对此加以証明，同样也是十分重要的。

(舒寸貝尔諾尔，M. P. Schützenberger 所提出来的猜想。)

3. 商农所研究的那个图 G，其容量 $\theta(G)$ 是什么(图 4-8)？

4. 第 5 章 两个有核图的和，是否也有核？在两个图都有格隆地函数，这个命題已被証明。

5. 第 6 章 若图門博奕 (X_1, Γ_1)，(X_2, Γ_2)，…，(X_n, Γ_n) 均有格隆地函数，其积則总不具有格隆地函数；然当 $\Gamma_i=\hat{\Gamma}_i$ 对 $i=1, 2, \cdots, n$ 都成立，則可証明該格隆地函数是存在的。能将这个条件加以改进，虽其实际意义不大，将仍是很重要的。

6. 第 10 章 对于一个偶图，当有一个极大对集 W(由粗边构成)，則每一交錯鏈 μ (細边与粗边交錯而成)，自一个非飽和点出发，而止于一条粗边的，可以确定一个新的极大对集

$$W'=(W-\mu)\cup(\mu-W).$$

对于一个偶数长的交錯圈，也是一样的。这样一种运算，称为“替换”。下面是一个重要但尚未解决的問題：已給一个偶图及二极大对集 W 与 W'，是否能自 W 出发，經有限次替换，而推得 W'？

当每一頂点 $x\in X$，都和每一頂点 $y\in Y$ 相邻，則有一个更强的結論，在这种情况下，总能自 W 出发，經过在长度为 4 的圈上所做的替换，来推得 W'：見第 9 章定理 2。

7． 第 11 章　书籍問題（見 p. 116），当工作的程序不是两道而是三道，則这个問題尙未解决。

8． 可奇怪的是我們尙不具备一种純图的系統法則，来寻求一个图的哈密尔頓回路；所知的唯一方法是解析方法，这种方法，似能加以改进。这个方法，可叙述如次：对应于每一因子，作数 ξ^i_j，若因子用到弧 (x_i, x_j)，取 $\xi^i_j=1$，否則，$\xi^i_j=0$．于是有不等式組：

$$(1)\qquad \begin{cases} 0\leqslant \xi^i_j < a^i_j, \\ \sum\limits_{j=1}^{n}\xi^i_j=1 \quad (i\leqslant n), \\ \sum\limits_{i=1}^{n}\xi^i_j=1 \quad (j\leqslant n). \end{cases}$$

設用单純型法，所求得的不等式(1)組的解，不构成一个哈密尔頓回路，則这个解包含一个初級回路 $[x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots]$，其中 $\{i_1, i_2, \cdots\}=I$ 是一个至少含有 n 个指标的集合。每一哈密尔頓回路应更满足

$$(2)\qquad \sum_{i\in I}\sum_{j\notin I}\xi^i_j\geqslant 1.$$

故須用单純型法求(1)与(2)的解，显見其应排斥适所求得的解。設新解再不构成一个哈密尔頓回路，象上面一样，推出一个不等式(3)，用单純型法求不等式組(1)，(2)，(3)的一个解；等等。按照这样方式，在有限步驟之后，最終将求得一个哈密尔頓回路（假使存在）。

能够将这种想法，过渡到运輸网絡上来嗎???

9． 第 13 章　下面的論断，尙未証明：設 G 是一个严格連接图，其 $\nu(G)>1$，則存在一个 $\nu(G)$ 条軌迹的集合，使每一頂点至少在两个这样的軌迹上。这个論断，对玫瑰形的图显能成立，当 $\nu(G)\geqslant n$，毋庸証明，所須証明的只在情况 $\nu(G)<n$．其所以重要，盖可由此推出不等式：

$$\delta(G)\geqslant\frac{2n}{\nu(G)}-1.$$

(柏拉唐, D. Bratton 的猜想。)

10. 第14章 魏-肯大(Wei-Kendall)(p. 142)的方法，可以归結为构造一个正規矩陣 D，使位于主对角綫上的全为零，而去求与其最大特征值 λ 相应的特征向量 $\boldsymbol{y}$；$\boldsymbol{y}$ 的坐标可取以划分 n 个博奕者的等級。

現在来研究一个具矩陣 $\left(\frac{1}{\lambda}\right)I-D$ 的多策略博奕(p. 236)，其中博奕的一方选取行，而另一方选取列；湯普森(G. Thompson)已証出所求得的向量 $\boldsymbol{y}$ 就是列博奕者的最优策略(必然唯一)(参看 Lectures on Game Theory, Markov chains and related Topics, Sandia Corp. Monograph, 1958)；要求証明的猜想是：在博奕 $I-(1/n)D$ 里，列博奕者的最优策略，給出和向量 $\boldsymbol{y}$ 相同的等級的划分。

(湯普森, G. Thompson 的猜想。)

11. 第20章 n 个頂点 m 条边的图，其极大联数为何？这个問題，和求一个图的极小直徑意义相似。

12. 第21章 四色定理，可以作为一个极为一般的定理的推理，这个一般性的定理，对于相当数目的图族，可予以証明。

設有一个无向而連接的图，X 为其頂点集合。若 X 的某一分划，其所有的类或类的合集，能构成連接子图，則为叙述方便，称 X 的这一分划为“完全連接的”。此外，将 X 分成 k 类的那些分划所成的集合，称为 Π_k。所要証明的定理，便可叙述如次：設对每一分划 $\pi\in\Pi_n$，存在两个相邻頂点属于同一个类，則在 Π_{n+1} 中存在一个完全連接的分划。

这个定理在 $n=1$ 或 $n=2$ 是很显然的，在 $n=3$，也甚易証明。在 $n=4$，若能予以証明，則四色定理便也能証，盖在平面图，已知

不存在五个頂点两两相邻。

（克蝕魏拉斯，G. Kreweras 的猜想。）

13. 另一猜想，既未能加以証明，也未能予以否定，且自这个猜想，可以导出四色定理，該猜想是：每一三次齐次，且无地峽边的平面图，具有一个半因子，其所有的圈均为偶数长。

（塔特，Tait 的猜想。）

14. 最后：設 S 是一个曲面，G 是一个色数为 k，S-拓扑的图；收縮有二頂相邻的集合，可得一个 k 頂的完全图。

在許多特殊情况下，这个猜想已为箫拉克（G. Dirac）所証明；在 $k=5$，若能将这个猜想加以証明，便能导出四色定理。

（赫德魏盖尔，Hadwiger 的猜想。）

附录 V　关于数数的某些基本原则的注

作者　雷勾厄　J. Riguet

已給图 G，若要求数出滿足某些条件的不同类型的子图或部分图，則毫无疑問，这个問題需要代数的配合；这里就来在一种极其一般的形式下，給出某些特殊重要的原則。

集 合 的 代 换

现在来研究一个有限集合 X；所有自 X 到 X 的一一映象，称为 X 的**代换**。例如对一切 $x \in X$，$e(x)=x$ 的映象 e，就是一个代换，称为**单位代换**。若 g 是 X 的一个代换，則逆映象 g^{-1} 也是 X 的一个代换。若 g 和 h 是 X 的两个代换，则由 $gh(x)=g[h(x)]$ 定义的乘积 gh 是 X 的一个代换。若 g 是 X 的一个代换，n 是一

个正整数，由

$$g^n(x)=ggg\cdots g(x)$$

定义的映象 g^n 是 X 的一个代换，称为 g 的 **n 次乘方**。同样，由

$$g^{-n}(x)=g^{-1}g^{-1}g^{-1}\cdots g^{-1}(x)$$

定义的映象 g^{-n} 是 X 的一个代换，称为 g 的**负 n 次方**。一般常取 $g^0=e$.

对于两个元素 $x, y\in X$，若存在整数 n，使 $y=g^n(x)$，便記：$y\tau_g x$. 关系 τ_g 是一个等价关系，盖

$$x=g^0(x)\quad (反身性),$$

$$y=g^n(x)\Rightarrow x=g^{-n}(y)\quad (对称性),$$

$$y=g^n(x),\ z=g^m(y)\Rightarrow z=g^{m+n}(x)\quad (傳递性).$$

关系 τ_g 称为 g 的**傳递性等价关系**。大家熟知，在集合 X 上的每一等价关系，确定 X 的一个分划，分 X 成許多**等价类**，两两互不相交；τ_g 的等价类，称为 g 的**傳递类**。

将代换 g 限制在其傳递类上所得到代换，称为 g 的**輪換**，g 便是这些輪換按任一順序的积。

【例1】 設 $X=\{a, b, c, d, e\}$，而 g 由

$$g(a)=d,\ g(b)=c,\ g(c)=b,\ g(d)=e,\ g(e)=a$$

来定义。通常記 g 为

$$g=\begin{pmatrix} a & b & c & d & e\\ d & c & b & e & a\end{pmatrix}.$$

g 的傳递类是 $\{a, d, e\}$ 与 $\{b, c\}$，而相应的輪換，則是代换

$$\begin{pmatrix} a & d & e & b & c\\ d & e & a & b & c\end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} b & c & a & d & e\\ c & b & a & d & e\end{pmatrix},$$

分別簡記为 $(a\,d\,e)$ 与 (b, c). 由此，可书

$$g=(a\,d\,e)(bc).$$

設 ρ 是集合 X 上的一个等价关系，等价类所成的集合，称为 **X 在 ρ 下的商集**，記为 X/ρ；若所有的等价类 $C\in X/\rho$ 具相同个

数的元素，则称等价关系 ρ 是正规的。

集合 X 的一个代换 g，若其 τ_g 是一个正规的等价关系，则称 g 是正规的。在这样情况，若对一个 $x\in X$，有 $x=g^n(x)$，则对所有的 $y\in X$，均有 $y=g^n(y)$。

代换群的傳递性等价关系

集合 X 的代换集合 G，若其性质

1° $e\in G$,

2° $g, h\in G \Rightarrow gh\in G$,

3° $g\in G \Rightarrow g^{-1}\in G$,

则称 G 构成一个群。

例如 X 的一切代换所成的集合 S_X 是一个群，称为 X 的对称群。由同一代换 g 的正数乘方或負数乘方所成的集合

$$\{e, g, g^2, g^3, \cdots, g^{-1}, g^{-2}, \cdots\}$$

成一群，称为由 g 形成的輪換群。

設 G 是集合 X 的一个代换群；对于两个元素 $x, y\in X$，若存在代换 $g\in G$，使 $y=g(x)$，便記 $y\tau_G x$。关系 τ_G 是一个等价关系，蓋：

$$x=e(x),\ e\in G \quad (\text{反身性}),$$

$$y=g(x),\ g\in G \Rightarrow x=g^{-1}(y),\ g^{-1}\in G \quad (\text{对称性}),$$

$$\left.\begin{array}{l} y=g(x),\ g\in G \\ z=h(y),\ h\in G \end{array}\right\} \Rightarrow z=hg(x),\ hg\in G \quad (\text{傳递性}).$$

关系 τ_G 称为 G 的傳递性等价关系，而其等价类是 G 的傳递类。

若只存在一个傳递类，则这个类是集合 X 全体，此时称群 G 是傳递的。

若 g 是 X 的一个代换，G 是由 g 形成的輪換群，显見 g 的傳

递性等价关系和 G 的傳递性等价关系完全相同；代换 g 仅由一个輪换所构成，当且仅当由 g 形成的輪换群是傳递的。

傳递类的数出

設 g 是 X 的一个代换，取

$$X_g=\{x/x\in X;\ g(x)=x\}.$$

若 G 是 X 的一个代换群，且設 x 是 X 的某一元素，取

$$G_x=\{g/g\in G;\ g(x)=x\}$$

可以立即驗証 G_x 是 G 的一个子群。現在来用不同的 $|X_g|$，其 $g\in G$ 的，以算出商集 X/τ_G 元素的个数。

引理 1 若 G 是 X 的一个代换群，G_x 是由使 $x\in X$ 不变的所有 G 的元素所构成，則

$$|\tau_G(x)|=\frac{|G|}{|G_x|},$$

其中 $\tau_G(x)$ 表示包含元素 x 的 G 的傳递类。

考察由下式：

$$\varphi_x(g)=g(x)\quad (g\in G)$$

定义的 G 在 X 里的单值映象 φ_x。

有 $\varphi_x(G)=\tau_G(x)$；另一方面，

$$\varphi_x(g)=\varphi_x(h)\ \Leftrightarrow\ g(x)=h(x)\ \Leftrightarrow\ h\in gG_x.$$

換言之，φ_x 乃

$$G/\varphi_x^{-1}\varphi_x \text{ 与 } G/G_x$$

之間的一个一一对应。

但 $G/\varphi_x^{-1}\varphi_x$ 和 $\varphi_x(G)=\tau_G(x)$ 之間有一一对应关系，故引理得証。

引理 2 若 x 和 y 是 G 的同一傳递类的两个元素，則

$$|G_x|=|G_y|.$$

事实上，若 $y=g(x)$，$g\in G$，可书

$$G_y=G_{g(x)}=\{h/h\in G;\ hg(x)=g(x)\}=\{h/h\in G;\ g^{-1}hg(x)=x\}.$$

另一方面，有

$$gG_xg^{-1}=\{h/h\in G;\ \text{存在某一}\ k\in G_x,\ \text{使}\ h=gkg^{-1}\}$$
$$=\{h/h\in G;\ g^{-1}hg(x)=x\}.$$

故最終有 $G_y=gG_xg^{-1}$。但若 A 是群 G 的任一子集合，又 g，$h\in G$，則 $|gAh|=|A|$，蓋

$$ga_1h=ga_2h \Rightarrow a_1h=a_2h \Rightarrow a_1=a_2.$$

于是引理得証。

基本定理　設 G 是 X 的一个代换群；恒有

$$|X/\tau_G|=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X_g|.$$

事实上，用两种不同方式，数出使 $g(x)=x$ 的元素对 (g, x)，可得

$$(1)\qquad \sum_{x\in X}|G_x|=\sum_{g\in G}|X_g|.$$

但

$$(2)\qquad \sum_{x\in X}|G_x|=\sum_{C\in X/\tau_G}\sum_{c\in C}|G_c|.$$

现在来研究一个傳递类 $C\in X/\tau_G$ 及一个 $x\in C$；按引理2，有

$$\sum_{c\in C}|G_c|=|\tau_G(x)|\times|G_x|.$$

按引理1，有

$$|\tau_G(x)|=|G|/|G_x|.$$

故

$$\sum_{c\in C}|G_c|=|G|,$$

因而(2)可写为

$$(2')\qquad \sum_{x\in X}|G_x|=|X/\tau_G|\times|G|.$$

比較(1)与(2')，便得所提出的公式。

联系等价关系的分划

所謂**分划**(在数論意义下),乃某一正整数集合 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s\}$ 在全部正整数集合里的一个单值映象 $\boldsymbol{a}$; 使数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 对应于 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 的分划,通常記为

$$\boldsymbol{a}=(\lambda_1^{\alpha_1}, \lambda_2^{\alpha_2}, \cdots, \lambda_s^{\alpha_s}).$$

毫无疑問,我們不应将这一概念,和(在集合論意义下的)**分划**概念相混淆,后一概念,定义于第 1 章,在本处却不需要。整数

$$w(\boldsymbol{a})=\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2+\cdots+\alpha_s\lambda_s$$

称为分划 $\boldsymbol{a}$ 的**权**。

整数

$$d(\boldsymbol{a})=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$$

称为分划 $\boldsymbol{a}$ 的**維**。

【例 1】 分划 $(1^3, 3^2, 4)$, 其权为 13, 其維为 6; 这个分划对应于将整数 13 分成正整数之和的一个分解:

$$13=4+3+1+3+1+1.$$

設 ρ 是集合 X 上的等价关系, φ 是 X 在集合 Y 上的一一映象; 于是 Y 在 Y 里的多值映象 $\varphi\rho\varphi^{-1}$, 确定 Y 上的一个等价关系,其等价类 $\varphi\rho\varphi^{-1}(y)$ 是 ρ 的等价类的象。

分别确定于集合 X 和 Y 上的两个等价关系 ρ 与 σ, 若存在一个一一映象 φ, 使 $\sigma=\varphi\rho\varphi^{-1}$, 則称此二等价关系是**相配的**。**联系等价关系 ρ 的分划**,乃分划

$$\boldsymbol{p}[\rho]=(\lambda_1^{\alpha_1}, \lambda_2^{\alpha_2}, \cdots),$$

其中,存在 α_1 个类,每一类恰含 λ_1 个元素, α_2 个类,每类恰含 λ_2 个元素等等。$\boldsymbol{p}[\rho]$的权等于 $|X|$, 而其維等于 $|X/\rho|$。易証:

論断 1 分别确定于两个集合 X 和 Y 上的两个等价关系 ρ 与 σ 是相配的,当且仅当其二联系分划是全等的。

【例 2】 $X=\{a, b, c, d, e, f, g\}$，$\rho$ 由等价类

$$\{a, b, c\}, \{d, e\}, \{f\}, \{g\}$$

确定。

使用代换 $\varphi=(a, d, g)(b, e)(c, f)$，等价关系 $\sigma=\varphi\rho\varphi^{-1}$ 乃取

$$\{d, e, f\}, \{g, b\}, \{c\}, \{a\}$$

作为其等价类。

于是便可驗証　　$\boldsymbol{p}[\rho]=\boldsymbol{p}[\sigma]=(1^2, 2, 3)$.

輪　换　指　数

联系分划这个概念，可用来给出基本定理的一个新的表达形式。首先引进創始于波立亚(G. Polya)的**指数**概念。

設 G 是集合 X 的一个代換群，并設 $\boldsymbol{a}$ 是权为 $w(\boldsymbol{a})=|X|$ 的一个分划；所有代换 $g\in G$，使 $\boldsymbol{p}[\tau_g]=\boldsymbol{a}$ 的，其个数記为 $h_G(\boldsymbol{a})$。

使数

$$g_G(\boldsymbol{a})=\frac{h_G(\boldsymbol{a})}{|G|}$$

对应于每一分划 $\boldsymbol{a}$ 的函数 g_G，称为群 G 的**輪換指数**。

引理　若 $g\in G$，則

$$|X_g|=\boldsymbol{p}[\tau_g](1).$$

事实上，$\boldsymbol{p}[\tau_g](1)$ 乃等价关系 τ_g 的等价类，蛻化为一个元素的个数，即謂只由在 g 下不变的 X 的一个元素所构成的那些类的个数。

基本定理的新形式　若 G 是 X 的代換群，則

$$|X/\tau_G|=\sum_{w(\boldsymbol{a})=|X|} g_G(\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}(1).$$

事实上，可书

$$|X/\tau_G|=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X_g|=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\boldsymbol{p}[\tau_g](1)$$

$$=\frac{1}{|G|}\sum_{w(\boldsymbol{a})=|X|}h_G(\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{a}(1)=\sum_{w(\boldsymbol{a})=|X|}g_G(\boldsymbol{a})\boldsymbol{a}(1),$$

相配单值映象

設 f 是集合 X 在集合 Y 里的单值映象；映象 $f^{-1}f$ 确定一个在 X 上的等价关系，类 $f^{-1}f(x)$ 是 X 里和 x 有同一个象的那些元素的集合；若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{p}[f^{-1}f]$，則称 f 是 $\boldsymbol{a}$ 型的。

設 f_1 是集合 X_1 在集合 Y_1 上的一个单值映象，f_2 是集合 X_2 在集合 Y_2 上的一个单值映象；若存在一个自 X_1 到 X_2 的一一映象 φ 及一个自 Y_1 到 Y_2 的一一映象 ψ，使

$$f_2\varphi=\psi f_1,$$

則称 f_1 和 f_2 是**相配的**。

論断 2 两个单值映象 f_1 与 f_2 是相配的，当且仅当

$$\boldsymbol{p}[f_1^{-1}f_1]=\boldsymbol{p}[f_2^{-1}f_2].$$

論断 3 为了使集合 X_1 与 X_2 在 Y 里的两个单值映象 f_1 与 f_2 是相配的，只須存在一个自 X_1 到 X_2 的一一映象 φ，使 $f_2\varphi=f_1$ 即足。

单值映象的次数

設 f 是有限集合 X 在集合 Y 上的一个单值映象；使每一 $y\in Y$，对应于 $f^{-1}(y)$ 的元素的个数，这种映象称为 f 的**次数**，記为 δf.

論断 4 集合 X_1 与 X_2 在 Y 里的两个映象 f_1 与 f_2 有相同的次数，当且仅当自 X_1 到 X_2 存在一个一一映象 φ，使 $f_2\varphi=f_1$.

特別地，$\delta f_1=\delta f_2$ 导致 f_1 与 f_2 有相同的象并相配。

又自前一論断可以推出，映象 f 是 $\boldsymbol{a}$ 型的，当且仅当 $\delta\delta f=\boldsymbol{a}$，卽当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 是 δf 的联系分划。

論断 5 当 f 是 $\boldsymbol{a}$ 型的，則 δf 是 $\delta\boldsymbol{a}$ 型的。

事实上，$\delta\delta f=\boldsymbol{a}$ 导致 $\delta\delta\delta f=\delta\boldsymbol{a}$.

設 ν 是任一有限集合 X 在正整数集合里的一个单値映象；則整数

$$d(\nu)=\sum_{x\subset X}\nu(x)$$

称为 ν 的維，記为 $d(\nu)$。

（若 ν 是一个分划，則又恰得“分划的維”这个概念。）

論断 6 有

$$d(\nu)=w(\delta\nu);\qquad |X|=d(\delta\nu).$$

自此，可以推出，若 f 是 X 在 Y 里的 $\boldsymbol{a}$ 型单値映象，則

$$|X|=w(\boldsymbol{a});\qquad |f(X)|=d(\boldsymbol{a}).$$

字与可易字

已給集合 X，一切有限个 X 元素的序列，称为**字**。字 m 的**型**按定义是分划 $\boldsymbol{a}=(\lambda_1^{\alpha_1},\lambda_2^{\alpha_2},\cdots,\lambda_s^{\alpha_s})$，这表示 X 的元素，在 m 里各出現 λ_1 次的恰有 α_1 个，各出現 λ_2 次的恰有 α_2 个，等等。因此，X 的元素，出現在 m 里的，其个数等于 $d(\boldsymbol{a})$，而这个字的长則等于 $w(\boldsymbol{a})$。

当一个字的确定，和出現于其中的 X 元素的順序无关，这个字称为**可易字**。

【例】 若 $X=\{a,c,p,q,r,t\}$，則字 *trcpaccaqtr* 取 $(1^2,2^3,3)$ 为其型。若这个字是可易的，这个字便与字 *aacttrrpqcc* 完全相同；通常将这个字和 X 在正整数集合里的一个映象等同起来：

$$v=\begin{pmatrix}a&c&p&q&r&t\\2&3&1&1&2&2\end{pmatrix}.$$

若字 *trcpaccaqtr* 是不可易的，則将这个字和区間 $I_{11}=\{1,2,3,4,\cdots,11\}$ 在 X 上的一个映象等同起来：

$$m=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11\\t&r&c&p&a&c&c&a&q&t&r\end{pmatrix}.$$

其次数是可易字

$$\delta m=\begin{pmatrix} a & c & p & q & r & t \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

其型是分划

$$\delta\delta m=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}=(1^2, 2^3, 3).$$

以下用 $M(X)$ 記包含 X 的每一元素至少一次的那些字的集合；用 $M_{\boldsymbol{a}}(X)$ 記 $M(X)$ 里 $\boldsymbol{a}$ 型那些字的集合；用 $M_\nu(X)$ 記 $M(X)$ 里可易字是 ν 的那些字的集合；用 $M_l(X)$ 記 $M(X)$ 里长为 l 那些字的集合。区間 $I_l=\{1, 2, \cdots, l\}$ 記为 I_l.

最后，設 G 是 I_l 的一个代换群，并設 $g\in G$.

用 $\bar{g}$ 記由下式确定的 $M_l(X)$ 的代换：

$$\bar{g}(m)=mg \quad (m\in M_l(X)).$$

論断 7 $\bar{g}$ 的集合 $\bar{G}$ 构成一个群，称为 G 在 $M_l(X)$ 上的拓殖。

事实上，若 g 与 h 是 I_l 的两个代换，则

$$\overline{gh^{-1}}=\bar{g}\bar{h}^{-1}.$$

若 $\boldsymbol{a}$ 是一个已給的分划，由 X 的元素所构成的，且 X 的所有元素都出現于其中的那些 $\boldsymbol{a}$ 型字的集合 $M_{\boldsymbol{a}}(X)$，实际上是由两两互不相交的，形如 $M_\nu(X)$ 的子集合的合集，其中 ν 的次数为 $\boldsymbol{a}$。

(1) $$M_{\boldsymbol{a}}(X)=\bigcup_{\delta\nu=\boldsymbol{a}} M_\nu(X).$$

但存在另一种方式分解 $M_{\boldsymbol{a}}(X)$. 事实上，考察整数集合 $\{1, 2, \cdots, s-1, s\}$ 上的某一等价关系 ρ，而用 $M_\rho(X)$ 記使 $m^{-1}m=\rho$ 的那些 $m\in M(X)$ 所成的集合，于是 $m_{\boldsymbol{a}}(X)$ 是由两两互不相交的，形如 $M_\rho(X)$ 的子集合的合集，其中 ρ 取 $\boldsymbol{a}$ 作为其分划：

(2) $$M_{\boldsymbol{a}}(X)=\bigcup_{p[\rho]=\boldsymbol{a}} M_\rho(X).$$

自这样两种不同的分解方式 (1) 与 (2)，乃立即推得一种更好的分解方法(3)：

(3)．　$M_a(X)=\bigcup_{\substack{\delta\nu=a\\ p[\rho]=a}} M_\nu(X)\cap M_\rho(X)$。

用 $M_{\nu,g}(X)$ 記所有滿足

$$m^{-1}m\supset\tau_g$$

的字 $m\in M_\nu(X)$ 所成的集合。

用 $M_g(X)$ 記所有 $M_\rho(X)$ 的合集，其中等价关系 $\rho\supset\tau_g$。于是有

$$M_{\nu,g}(X)=M_\nu(X)\cap M_g(X).$$

論断 8　已給区間

$$I_l=\{1,2,\cdots,l\}$$

的一个代换 g，在 $\bar g$ 下不变的字 $m\in M_l(X)$ 的集合是 $M_g(X)$。

事实上，

$\bar g(m)=m\Leftrightarrow mg=m\Leftrightarrow mg(i)=m(i)$ 对一切 $i\in I_l$ 均成立

$\Leftrightarrow g(i)\in m^{-1}m(i)$ 对一切 $i\in I_l$ 均成立

$\Leftrightarrow g^n(i)\in m^{-1}m(i)$ 对一切 $i\in I_l$ 及一切整数 n 均成立

$\Leftrightarrow \tau_g(i)\in m^{-1}m(i)$ 对一切 $i\in I_l$ 均成立

$\Leftrightarrow \tau_g\subset m^{-1}m$.

这就証明了所要建立的等式。

推理　已給区間 I_l 的一个代换 g，在 $\bar g$ 下不变的 $M_\nu(X)$ 的字的集合是

$$M_{\nu,g}(X).$$

論断 9　設 ν 是 X 上长为 $d(\nu)=l$ 的一个可易字，G 是区間 I_l 的一个代换群，再設 $\bar G$ 是 G 在 $M_\nu(X)$ 上的拓殖，則

$$|M_\nu(X)/\tau_{\bar G}|=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|M_{\nu,g}(X)|.$$

按論断 4，集合 X 在集合 Y 里的映象 f，具相同的次数，且滿足 $f^{-1}f\supset\rho$，其中 ρ 是一个已知的等价关系，所有这些映象的集合，可取滿足 $\varphi\rho\varphi^{-1}=\rho$ 的代换 φ 右乘其中一个映象而求得。

这个注指出 $|M_{\nu,g}(X)|$ 仅依赖于 $\delta\nu$ 与 $\boldsymbol{p}[\rho]$，故可取

$$|M_{\nu,g}(X)| = \Phi(\delta\nu, \boldsymbol{p}[\rho]).$$

論断 10 設 ν 是 X 上长为 $d(\nu)=l$ 的一个可易字，G 是区間 I_l 的一个代换群，再設 $\overline{G}$ 是 G 在 $M_\nu(X)$ 上的拓殖，则

$$|M_\nu(X)/\tau_{\overline{G}}| = \sum_{w(\boldsymbol{a})=l} q_G(\boldsymbol{a})\Phi(\delta\nu, \boldsymbol{a}).$$

事实上，

$$\begin{aligned}|M_\nu(X)/\tau_{\overline{G}}| &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\Phi(\delta\nu, \boldsymbol{p}[\tau_g]) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{w(\boldsymbol{a})=l}\sum_{\boldsymbol{p}[\tau_g]=\boldsymbol{a}}\Phi(\delta\nu, \boldsymbol{a}) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{w(\boldsymbol{a})=l} h_G(\boldsymbol{a})\Phi(\delta\nu, \boldsymbol{a}) \\ &= \sum_{w(\boldsymbol{a})=l} q_G(\boldsymbol{a})\Phi(\delta\nu, \boldsymbol{a}).\end{aligned}$$

在指出这个論断如何作为数数方法的基础之前，先来考察一些特殊情况。

使分划 $\boldsymbol{a}=(\lambda_1^{\alpha_1}, \lambda_2^{\alpha_2}, \cdots)$ 和数：

$$c(\boldsymbol{a}) = \frac{(\alpha_1\lambda_1+\cdots+\alpha_s\lambda_s)!}{(\lambda_1!)^{\alpha_1}\cdots(\lambda_s!)^{\alpha_s}}$$

对应的函数 c，称为多项系数。

易見集合 X 在集合 Y 上具已知次数 ν 的映象，其个数等于 $c(\delta\nu)$，但这个数也是具次数 ν 且满足 $x\in m^{-1}m(x)$ 的字 m 的个数。故有

$$|M_\nu(X)| = c(\delta\nu),$$

$$\Phi(\boldsymbol{a}, 1^w) = c(\boldsymbol{a})。$$

当 $d(\delta\nu)>d(\boldsymbol{p}[\rho])$，$M_\nu(X)\cap M_\rho(X)=\varnothing$，故矩陣 $\Phi(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 是三角形的（見图 1）。

引进由

$$k(\boldsymbol{a}) = c(\delta\boldsymbol{a})$$

确定的分划函数 $k(\boldsymbol{a})$。

易見 $k(\boldsymbol{a})$ 恰給出次数为 $\boldsymbol{a}$ 的可易字的个数。

2	1	1^2
0	1	2
1^2	2	$\boldsymbol{a}\backslash\boldsymbol{b}$

6	3	1	1^3
0	1	1	1, 2
0	0	1	3
1^3	1, 2	3	$\boldsymbol{a}\backslash\boldsymbol{b}$

24	12	6	4	1	1^4
0	2	2	2	1	1^2, 2
0	0	2	0	1	2^2
0	0	0	1	1	1, 3
0	0	0	0	1	4
1^4	1^2, 2	2^2	1, 3	4	$\boldsymbol{a}\backslash\boldsymbol{b}$

120	60	30	20	10	5	1	1^5
0	6	6	6	4	3	1	1^3, 2
0	0	2	0	2	1	1	1, 2^2
0	0	0	2	1	2	1	1^2, 3
0	0	0	0	1	0	1	2, 3
0	0	0	0	0	1	1	1, 4
0	0	0	0	0	0	1	5
1^5	1^3, 2	1, 2^2	1^2, 3	2, 3	1, 4	5	$\boldsymbol{a}\backslash\boldsymbol{b}$

图 1

同样，引进由

$$e(\boldsymbol{a})=\frac{c(\boldsymbol{a})k(\boldsymbol{a})}{d(\boldsymbol{a})!}=\frac{(\alpha_1\lambda_1+\cdots+\alpha_s\lambda_s)!}{(\lambda_1!)^{\alpha_1}\cdots(\lambda_s!)^{\alpha_s}\alpha_1!\cdots\alpha_s!}$$

确定的分划函数 $e(\boldsymbol{a})$.

易見 $e(\boldsymbol{a})$ 恰給出満足 $\boldsymbol{p}[\rho]=\boldsymbol{a}$ 的等价关系 ρ 的个数。

例

設已給六个球：3 紅 2 黑 1 白，同顏色的球看作沒有差別，問

有多少方法，将这六个球分布在空間不固定的八面体上？

首先，和原設相反，假定八面体在空間是固定的。設 $X=\{a, b, c\}$ 表示所給的三种顏色，其中 a 表黑色，b 表白色，c 表紅色。于是在球的不同分布和次数为 ν 的字之間，有一一对应，其中 ν 是可易字 $\nu=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. 在八面体固定的情況下，問題的解答是

$$|M_\nu(X)|=c(\delta\nu)=c(1, 2, 3)=\frac{6!}{1!\,2!\,3!}=60.$$

現在假設八面体在空間是不固定的，于是在球的不同分布，和关于八面体运动群 G 次数为 ν 的字的傳递类之間有一一对应。問題的解答遂是

$$|M_\nu(X)/\tau_G|=\sum_{v(\boldsymbol{a})=6} q_G(\boldsymbol{a})\Phi[(1, 2, 3), \boldsymbol{a}].$$

設 G 是八面体的群，茲往求輪換指数 q_G. 記出八面体的六个頂点，如图所示，并数出 G 的所有元素。

仅有一个代換 $g\in G$，使 $\boldsymbol{p}[\tau_g]=(1^6)$，这是恒等代換。

有六个代換 $g\in G$，使 $\boldsymbol{p}[\tau_g]=(1^2, 4)$，这些代換是繞某一对角綫轉 90° 的六个旋轉：(4516)，(6154)，(1243)，(3421)，(2536)，(6352)。

有三个代換 $g\in G$，使 $\boldsymbol{p}[\tau_g]=(1^2, 2^2)$，这些代換是繞某一对角綫轉 180° 的三个旋轉：(41)(56)，(14)(23)，(23)(56)。

有六个代換 $g\in G$，使 $\boldsymbol{p}[\tau_g]=(2^3)$，这些代換是繞某一对对边中点連綫轉 180° 的六个旋轉：(12)(34)(56)，(13)(24)(56)，(14)(25)(36)，(14)(35)(26)，(15)(46)(23)，(16)(45)(23)。

有八个代換 $g\in G$，使 $\boldsymbol{p}[\tau_g]=(3^2)$，这些代換是繞某一对对面中心連綫轉 120° 的八个旋轉。

这 24 个代換，构成八面体的群 G. 由此：

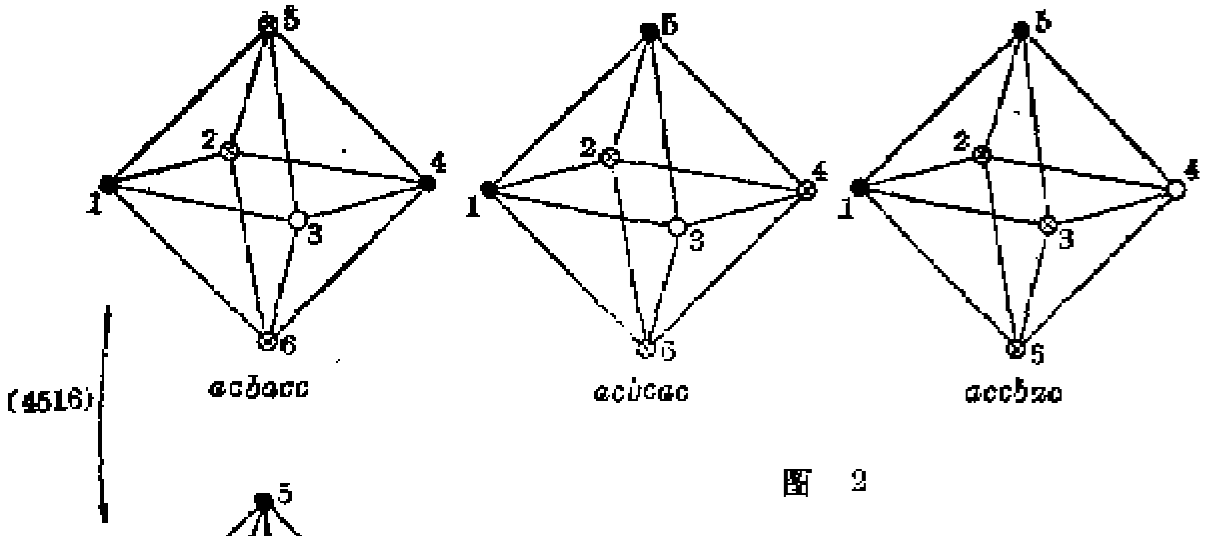
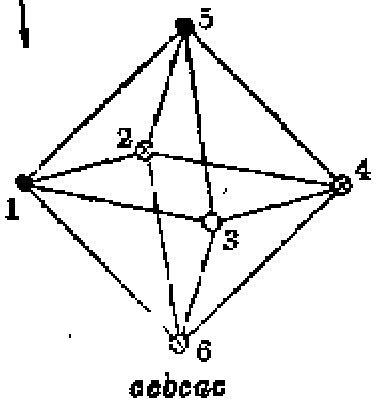


图　2



$q_G(1^6)=1/24$;　　$q_G(1^2,\ 4)=6/24$;

$q_G(1^2,\ 2^2)=3/24$;　　$q_G(2^3)=6/24$;

$q_G(3^2)=8/24$.　　q_G 别的值都是零。

此外，又知

$$\Phi[(123),\ (1^6)]=c(1,\ 2,\ 3)=60;$$

$\Phi[(1,\ 2,\ 3),\ (1^2,\ 4)]=0$, 因可易字 a^2bc^3 不含四次方;

$\Phi[(1,\ 2,\ 3),\ (1^2,\ 2^2)]=4$, 因可易字 a^2bc^3 可以写成四种不同形式:

$$(b)(c)(a^2)(c^2),\qquad (b)(c)(c^2)(a^2),$$
$$(c)(b)(a^2)(c^2),\qquad (c)(b)(c^2)(a^2);$$

$\Phi[(1,\ 2,\ 3),\ (2^3)]=0$, 因可易字 a^2bc^3 不含两个三方[1];

$\Phi[(1,\ 2,\ 3),\ (3^2)]=0$, 因可易字 a^2bc^3 不含三个平方作为因子。

由此

$$|M_\nu(X)/\tau_G|=\frac{60}{24}+\frac{3}{24}\cdot 4=3.$$

---

[1] 与下条的解释部分应对换。——譯者注

故問題的解答是：在不固定的八面体上，仅有三个不同的方法，分布三个紅球两个黑球及一个白球。图 2（其中黑圈表黑球，带×的圈表紅球，空圈表白球）指出，在水平綫上的三个图表示三种不同的分布，在表示分布 *acbacc* 的那个八面体之下，作出了表示分布 *ccbcaa* 的八面体。事实上这两种結构是等价的，蓋經过繞对角綫 2，3 的一个旋轉，卽經过代换(4516)，可自第一个分布过渡到第二个分布。

参 考 文 献

第1章 基本概念

[1] C. BERGE, Sur l'Isovalence et la Régularité des Transformateurs, *C. R. Acad. Sciences*, **231**, 1950, p. 1404; Sur une Théorie Ensembliste des Jeux Alternatifs, *C. R. Acad. Sciences*, **232**, 1951, p. 294.

[2] D. KÖNIG, *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen*, Leipzig, 1936 (Akad. Verl. M. B. H.), et New York, 1950 (Chelsea).

[3] J. RIGUET, Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois, *Bull. Soc. Math. de France*, **76**, 1948, p. 114.

[4] A. SAINTE-LAGUË, Les Réseaux (ou Graphes), *Mém. des Sciences Math.*, **18**, Paris, 1926.

第2章 后继理論的初步研究

[1] R. CROISOT, M. L. DUBREIL-JACOTIN, et L. LESIEUR, *Leçons sur la Théorie des Treillis* (Gauthier-Villars, éd.), Paris, 1953.

[2] M. RICHARDSON, Relativization and Extension of Solutions of Reflexive Relations, *Pacific J. of Math.*, **5**, 1955, p. 551.

第3章 无限图上的序数函数和格隆地函数

[1] C. BERGE, La Fonction de Grundy d'un Graphe Infini, *C. R. Acad. Sciences*, **242**, 1956, p. 1404.

[2] C. BERGE, A Problem on Infinite Graphs, Cohférence au Colloquium Harvard-M. I. T., mai 1957.

[3] N. G. DE BRUIJN et P. ERDÖS, A Colour Problem for Infinite Graphs and a Problem in the Theory of Relations, *Proc. of the Nederl. Ak. W.*, **54**, 1951, p. 371.

[4] W. H. GOTTSCHALK, Choice Functions and Tychonoff's Theorem, *Proc. A. M. S.*, **2**, 1951, p. 172.

[5] R. RADO, Axiomatic Treatment of rank in infinite sets, *Canad. J. of Math.*, **1**, 1949, p. 337,

第4章 图論的基本数据

[1] C. Berge, Two theorems in graph theory, *Proc. Nat. Ac. Sc.*, **43**, 1957, p. 842.

[2] M. Kraitchik, *Le Problème des Reines, Bruxelles, 1926.*

[3] G. Kreweras, Peut-on former un réseau donné avec des parties finies d'un ensemble dénombrable?, *C. R. Acad. Sciences*, **222**, 1946, p. 1025.

[4] G. Polyá, Sur le nombre des isomètres de certains Composés chimiques, *C. R. Acad. Sciences*, **202**, 1936, p. 1554.

[5] C. E. Shannon, The zero-error capacity of a noisy channel, Composium on Information Theory, *I. R. E. Transactions*, **3**, 1956, p. 3.

第5章 图 核

[1] C. Berge, Théorie générale des jeux à *n* personnes, Chap. 5: Coalitions, p. 82, *Mém. des Sciences Math.*, **138**, Paris, 1957 (Gauthier-Villars, éd.).

[2] G. T. Guilbaud, La théorie des Jeux, *Écon. Appl.*, 1949, p. 18.

[3] J. Von Neumann et O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, 1944, 1947 et 1953 (Princeton University Press).

[4] M. Richardson, Solutions of irreflexive relations, *Annals of Math.*, **58**, 1953, p. 573. —On Weakly ordered systems, *Bull. of the A. M. S.*, **52**, 1946, p. 113. —Extensions theorems for solutions of irreflexive relations, *Proc. of the Nat. Acad. of Sciences*, **39**, 1953, p. 649.

第6章 图上博奕

[1] E. W. Adams et D. C. Benson, Nim type games, Carnegie Inst. of Technology, *Techn. Report*, **13**, 1956.

[2] C. Berge, Topological games with perfect information (Contributions to the theory of Games 3), *Annals of Math. Studies*, **39**, 1957, p. 165; Théorie générale des jeux à *n* personnes, *Mém. Sc. Math.*, **138**, Paris, 1957.

[3] C. Berge et M. P. Schützenberger, Jeux de Nim et solutions, *C. R. Acad. Sciences*, **242**, 1956, p. 1672.

[4] P. M. Grundy, Mathematics and Games, *Eureka*, **2**, 1939, p. 6.

[5] P. M. Grundy et C. A. B. Smith, Disjunctive games with the last player loosing, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **52**, 1956, p. 527.

[6] J. C. HOLLADAY, Cartesian product of termination Games (Contributions to the theory of Games 3), *Ann. of Math. St.*, **39**, 1957, p. 189.

[7] E. H. MOORE, A generalization of the game called Nim, *Ann. of Math.*, 11, 1909, p. 93.

[8] R. SPRAGUE, Bemerkungen über eine spezielle Abelsche Gruppe, *Math. Z.*, **51**, 1947, p. 82. — Über mathematische Kampfspiele, *Tokoku J. of Math.*, **41**, 1936, p. 438.

[9] C. P. WELTER, The theory of a class of games on a sequence of squares, in terms of the advancing operation in a special group, *Proc. Kon. Nederl. Akad. N.* (série A), **57**, 1954, p. 194.

第7章 最短路徑問題

[1] M. BECKMANN, C. B. MCGUIRE, C. B. WINSTEN, *Studies in the economics of transportation*, New Haven, 1956 (Yale university press).

[2] R. BELLMAN, The theory of dynamic programming, *Bull. A. M. S.*, **60**, 1954, p. 503.

[3] L. R. FORD, Network flow theory, *Rand Corp. paper*, P-923, 1956.

[4] E. LUCAS, *Récréations mathématiques*, **1**, Paris, 1921, p. 47.

[5] G. TARRY, Le Problème des Labyrinthes, *Nouvelles Annales de Math.*, **14**, 1895, p. 187.

第8章 运输网絡

[1] C. BERGE, Sur la déficience d'un réseau infini, *C. R. Acad. Sciences*, **245**, 1957, p. 1206.

[2] L. R. FORD et D. R. FULKERSON, Maximal flow through a network, *Canadian J. of Math.*, **8**, 1956, p. 399.

[3] L. R. FORD et D. R. FULKERSON, Dynamic Network Flow, *Rand Corp. paper*, P-967, 1956.

[4] D. GALE, A theorem on flows in networks, *Pacific J. of Math.*, **7**, 1957, p. 1073.

[5] A. J. HOFFMAN et H. W. KUHN, On systems of distinct representatives (Linear inequalities and related systems), *Annals of Math. Studies*, **38**, 1956, p. 199.

[6] G. KREWERAS, Extension d'un théorème sur les répartitions en classes, *C. R. Acad. Sciences*, **222**, 1946, p. 431.

[7] J. MARCZEWSKI et G. T. GUILBAUD, Essai d'analyse graphique d'une

comptabilité nationale, *Économie appliquée*, **2**, 1949, p. 138.

第9章 半次定理

[1] D. Gale, A theorem on flows in network, *Pacific J. of Math.*, **7**, 1957, p. 1073.

[2] G. H. Hardy, J. E. Littlewood et G. Polya, *Inequalities*, Cambridge, 1952.

[3] R. F. Muirhead, Some methods applicable to identities and inequalities of symmetric algebraic functions of n letters, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **21**, 1903, p. 144.

第10章 偶图的对集

[1] C. Berge, Sur la déficience d'un réseau infini, *C. R. Acad. Sciences*, **245**, 1957, p. 1206.

[2] G. Birkhoff, Tres observaciones sobre el algebra lineal, *Rev. Univ. nac. Tucuman*, Série A, **6**, 1941, p. 147.

[3] J. Egerváry, Matrixok kombinatorius tulajdonsagairol, *Mat. Fiz. Lapok*, 1931, p. 16.

[4] P. Hall, On representations of subsets, *J. London Math. Soc.*, **10**, 1934, p. 26.

[5] P. R. Halmos et H. E. Vaughan, The marriage problem, *Am. J. of Math.*, **72**, 1950, p. 26.

[6] D. König et S. Valko, Über mehrdeutige Abbildungen von Mengen, *Math. Annalen*, **95**, 1926, p. 135.

[7] H. W. Kuhn, The Hungarian method for the assignement problem, *Naval Research Quaterly*, **2**, 1955, p. 83.

[8] H. B. Mann et H. J. Ryser, Systems of distinct representatives, *Am. Math. Monthly*, **60**, 1953, p. 397.

[9] O. Ore, Graphs and matching theorems, *Duke Math. J.*, **22**, 1955, p. 625.

[10] R. Rado, Factorization of even graphs, *Quaterly J. of Math.*, **20**, 1949, p. 95.

第11章 因 子

[1] W. Ahrens, Mathematische unterhaltungen und Spiele, Berlin 1910, p. 319.

[2] G. A. DIRAC, The structure of k-chromatic graphs, *Fund. Math.*, **40**, 1953, p. 50.

[3] EULER, Commentationes Arithmeticae Collectae, St. Petersburg, 1766, p. 337.

[4] FLYE SAINTE-MARIE, Note sur un problème relatif à la marche du cavalier sur l'échiquier, *Bull. Soc. Math. de France*, **5**, 1876, p. 144.

[5] S. JOHNSON, Optimal 2 and 3-stage production schedules with set up times included, *Naval Res. Quaterly*, 1954.

[6] M. KRAITCHIK, *La Mathématique des jeux*, Bruxelles, 1930, p. 357.

[7] G. RINGEL, Über drei kombinatorische probleme am n-dim. Würfel und Würfelgitter, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **20**, 1955, p. 10.

[8] A. SAINTE-LAGUË, *Avec des nombres et des lignes*, Paris, 1943 (Vuibert, éd.), p. 291.

第13章 严格連接图的直徑

[1] D. BRATTON, Efficient communication networks, *Cowles Comm. Disc. Paper*, 2119, 1955.

[2] L. S. CHRISTIE, R. D. LUCE, J. MACY, Communication and learning in a task-oriented group, *M. I. T. Res. Lab. of electr. technical Report*, **231**, 1952, p. 238.

[3] R. RADNER et A. TRITTER, Communication in networks, *Cowles Comm. paper*, 2098, 1954.

第14章 图的联系矩陣

[1] L. KATZ, An application of matrix algebra to the study of human relations, mim., *Univ. of North Carolina*, 1950.

[2] M. D. KENDALL, *Rank Correlation methods*, Londres, 1948 (Griffin, éd.); Further contributions to the theory of paired comparisons, *Biometrics*, **2**, 1955, p. 43.

[3] C. LÉVI-STRAUSS, *Les structures élémentaires de la parenté*, Paris, 1949 (Presses universitaires).

[4] R. D. LUCE et A. D. PERRY, A method of matrix analysis of group structure, *Psychometrika*, **14**, 1949, p. 45.

[5] R. D. LUCE, A note on Boolean matrix theory, *Proc. A. M. S.*, **3**, 1952, p. 382.

[6] J. L. MORENO, *Fondements de la Sociométrie* (trad. Lesage-Maucorps),

Paris, 1954 (Presses universitaires).

[7] I. C. Ross et F. Harary, On the determination of redundancies in sociometric chains, *Psychometrika*, **17**, 1952, p. 195.

[8] T. H. Wei, *The algebraic foundations of ranking theory*, thèse, Cambridge, 1952.

第15章 投射矩陣

[1] J. Chuard, Questions d'analysis situs. *Rend. Circ. Palermo*, **46**, 1922, p. 185.

[2] I. Heller et C. B. Tompkins, An extension of a theorem of Dantzig's, *Ann. of math. studies*, **38**, 1956, p. 247.

[3] A. J. Hoffman et J. B. Kruskal, Integral boundary points of Convex polyhedra, *Ann. of Math. Studies*, **38**, 1956, p. 223.

[4] G. Kirchhoff, *Poggendorf Annalen*, **72**, 1847, p. 497.

[5] S. Okada, Algebraic and topological foundations of network synthesis, *Proc. Symp. on Modern Network synthesis*, New York, 1955, p. 283.

[6] H. Poincaré, Complément à l'analysis situs, *Rend. Circ. Palermo*, **13**, 1899, p. 285.

[7] O. Veblen et J. W. Alexander, Manifolds of *n* dimensions, *Ann. of Math.*, **14**, 1913, p. 163.

第16章 树与树形图

[1] T. van Aardenne-Ehrenfest et N. G. de Bruijn, Circuits and trees in oriented linear graphs, *Simon Stevin*, **28**, 1951, p. 203.

[2] R. Bott et J. P. Mayberry. Matrices and trees, *Economic Activity analysis*, New York, 1954 (Wiley, éd.), p. 391.

[3] A. Cayley, Collected mathematical papers, Cambridge, **3**, p. 242, **13**, p. 26. etc.

[4] C. Jordan, Sur les assemblages de lignes, *J. für die Reine und angew. Math.*, **70**, 1869, p. 185.

[5] P. J. Kelly, A congruence theorem for trees, *Pacific J. of Math.*, **7**, 1957, p. 961.

[6] J. B. Kruskal, On the shortest spanning subtree of a graph, *Proc. A. M. S.*, **7**, 1956, p. 48.

[7] C. de Polignac, Théorie des ramifications, *Bull. Soc. Math. France*, **8**, 1880, p. 120.

[8] H. M. Trent, A note on the enumeration and listing of all possible trees in a connected linear graph, *Proc. Nat. Ac. Sciences*, **40**, 1954, p. 1004.

第17章 尤拉問題

[1] T. van Aardenne-Ehrenfest, N. G. de Bruijn, Circuits and trees in oriented linear graphs, *Simon Stevin*, **28**, 1951, p. 203.

[2] N. G. de Bruijn, A combinatorial problem, *Proc. Nederl. Akad. Wetensch.*, **49**, 1946, p. 758.

[3] I. J. Good, Normal recurring decimals, *Bull. A. M. S.*, **40**, 1947, p. 859.

[4] M. H. Martin, A problem in arrangements, *Bull. A. M. S.*, **40**, 1934, p. 859.

第18章 任意图内对集

[1] C. Berge, Two theorems in graph theory, *Proc. Nat. Ac. Sciences*, **43**, 1957, p. 842.

[2] C. Berge, Sur le couplage maximum d'un graph, *C. R. Acad. Sciences*, **247**, 1958, p. 258.

[3] T. Gallai, On factorisation of graphs, *Acta Math. Hungaricae*, **1**, 1950, p. 133.

[4] F. G. Maunsell, A note on Tutte's paper, *J. London Math. Soc.*, **27**, 1952, p. 127.

[5] R. Z. Norman et M. O. Rabin, An algorithme for a minimum cover of a graph (abstract), *Notices of the A. M. S.*, **5**, février, 1958, p. 36.

[6] J. Petersen, Die Theorie der regulären Graphs, *Acta Math.*, **15**, 1891, p. 193.

[7] J. P. Roth, Combinatorial topological methods in the synthesis of switching circuits, *I. B. M. Res. Report*, RC-11, Poughkeepsie, 1957.

[8] W. T. Tutte, The factorisation of linear graphs, *J. London Math. Soc.*, **22**, 1947, p. 107.

第19章 半因子

[1] F. Baebler, Über die Zerlegung regularer Streckenkomplexe ungerader Ordnung, *Comment. Math. Helvetici*, **10**, 1938, p. 275.

[2] H. B. Belck, Reguläre Faktoren von Graphen, *J. Reine Angew. Math.*,

188, 1950, p. 228.

[3] A. SAINTE-LAGÜE, Les réseaux unicursaux et bicursaux, *C. R. Acad. Sciences*, **182**, 1926, p. 747.

[4] W. T. TUTTE, The factors of Graphs, *Canad. J. of Math.*, **4**, 1957, p. 314; A short proof of the factor theorem for finite graphs, *Canad. J. of Math.*, **6**, 1954, p. 347.

[5] W. T. TUTTE, On Hamiltonian Circuits, *London Math. Soc. J.*, **21**, 1946, p. 99.

第20章 图的連接性

[1] G. A. DIRAC, The structure of k-chromatic graphs, *Fund. Math.*, **40**, 1953, p. 42; Some theorems on abstract graphs, *Proc. London Math. Soc.*, **2**, 1952, p. 69.

[2] G. HAJÓS, Zum Mengerschen Graphensatz, *Acta litt. ac Sc.* (Math.), **7**, 1934, p. 44.

[3] J. B. KELLY et L. M. KELLY, Paths and Circuits in critical graphs, *Am. J. of Math.*, **76**, 1954, p. 790.

[4] K. MENGER, Zur allgemeinen Kurventheorie, *Fund. Math.*, **10**, 1926, p. 96.

[5] H. WHITNEY, Non separable and planar graphs, *Trans. A. M. S.*, **34**, 1932, p. 339; Congruent graphs and the connectivity of graphs, *Am. J. of Math.*, **54**, 1932, p. 150.

第21章 平 面 图

[1] G. A. DIRAC, Map colour theorems related to the Heawood Colour formula, *J. London Math. Soc.*, **31**, 1956, p. 460.

[2] G. A. DIRAC et S. SCHUSTER, A theorem of Kuratowski, *Proc. of the Nederl. Ak. W.*, **57**, 1954, p. 343.

[3] J. ERRERA, Du coloriage des cartes, thèse Bruxelles, 1921; *Mathesis*, **36**, 1922, p. 56.

[4] G. KURATOWSKI, Sur le problème des courbes gauches en topologie, *Fund. Math.*, **15～16**, 1930, p. 271.

[5] G. RINGEL, Bestimmung der Maximalzahl der Nachbargebiete auf nichtorientierbaren Flächen, *Math. Annalen*, **127**, 1954, p. 181.

[6] P. G. TAIT, Note on a theorem in geometry of position, *Trans. Royal Soc. of Edimbourgh*, **29**, 1880, p. 657.

[7] H. WHITNEY, Planar graphs. *Fund. Math.*, **21**, 1933, p. 73.
[8] H. WHITNEY, Congruent graphs and the connectivity of graphs, *Am. J. of Math.*, **54**, 1932, p. 150.

附录 I 关于博奕一般理論的注

[1] C. BERGE, Théorie générale des jeux à *n* personnes. *Mém. des Sc. Math.*, **138**, Paris, 1957.
[2] H. KUHN, Extensive games and the problem of information, *Ann. of Math. St.*, **28**, Princeton, 1953, p. 193.
[3] J. VILLE, *Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications*(E. Borel), **4**, Paris, 1938, p. 105.

附录 II 关于运輸問題的注

[1] P. APPELL, Le problème géométrique des déblais et remblais, *Mém. des Sciences Math.*, **27**, Paris, 1928 (Gauthier-Villars, éd.).
[2] A. S. CAHN, The Warehouse Problem. *Bull. A. M. S.*, **54**, 1948, p. 1073.
[3] G. B. DANTZIG, Application of the simplex method to a transportation problem, Activity Analysis, *Cowles Com. Monograph*, **13**, New York, 1951 (Wiley and Sons, éd.).
[4] M. M. FLOOD, On the Hitchcock distribution problem, *Pacific J. of Math.*, **3**, 1953, p. 369.
[5] L. R. FORD et D. R. FULKERSON, Solving the transportation problem, *Management Science*, **3**, 1956, p. 24; A primal dual algorithm for the capacited Hitchcock problem, *Rand Res. Mem.*, P-827, Santa Monica, 1956.
[6] D. R. FULKERSON, Hitchcock transportation problem, *Rand paper*, P-890, Santa-Monica, 1956.
[7] F. L. HITCHCOCK, The distribution of a product from several sources to numerous localities. *J. Math. Phys.*, **20**, 1941, p. 224.
[8] L. KANTAROVITCH, On the translocation of Masses, *Doklady Akad. Nauk. SSSR*, **37**, 1942. p. 199.
[9] T. C. KOOPMANS et S. REITER, A model of transportation, Activity Analysis, *Cowles Com. Monograph*, **13**, New York, 1951 (Wiley and Sons, éd.), p. 222.
[10] H. W. KUHN, The Hungarian method for the assignment problem, *Naval Res. Quat.*, **2**, 1955.

[11] MONGE, Déblai et remblai, *Mémoires de l'Ac. des Sciences*, 1781.

[12] A. ORDEN, The transshipment problem, *Management Science*, **2**, 1956.

[13] D. F. VOTAW et A. ORDEN, The personnel assignement problem, *Scoop Symposium on Linear Inequalities and Programming*, Washington, 1952, p. 155.

附录III 关于位势概念使用于运输网絡的注

[1] A. d'AURIAC, A propos de l'unicité de solution dans les problèmes de réseaux maillés, *La Houille Blanche*, **2**, 1947, p. 209.

[2] R. L. BROOKS, C. A. B. SMITH, A. H. STONE, W. T. TUTTE, The dissection of rectangles into squares, *Duke Math. J.*, **7**, 1940, p. 312.

[3] R. J. DUFFIN, Non linear networks II, *Bull. A. M. S.*, **53**, 1947, p. 963.

[4] T. C. KOOPMANS et S. REITER, *A model of transportation*, *Activity Analysis of Production and Allocation*, 2e édition, p. 222, New York, 1951 (Wiley and Sons; Chapmand and Hall).

[5] M. PARODI, Sur l'existence des réseaux électriques, *C. R. Acad. Sc.*, **223**, 1946, p. 23.

[6] R. SPRAGUE, Zur Abschätzung der Mindestzahl inkongruenter quadrate, *Math. Zeit.*, **46**, 1940, p. 460.

[7] O. TAUSSKY, A recurring theorem on determinants, *Am. Math. Monthly*, **56**, 1949, p. 672.

附录V 关于数数的某些基本原则的注

可参考：

[1] DAVIS, The number of structures of finite relations, *Proc. A. M. S.*, 1953, p. 486.

[2] G. W. FORD, F. HARARY, R. Z. NORMAN, G. E. UHLENBECK, Combinatorial problems in the theory of graphs, *Proc. Nat. Ac. Sc.*, **42**, 1956, p. 122; **42**, 1956, p. 203; **42**, 1956, p. 529; **43**, 1957, p. 163.

[3] R. M. FORSTER, The number of series-parallele networks, *Proc. Int. Congres of Math.*, 1950, p. 646.

[4] F. HARARY, Note on the Polyà and Otter formulas for enumerating trees, *Michigan Math. J.*, **3**, 1955, p. 109; The number of dissimilar supergraphs of a linear graph, *Pacific J. of Math.*, **7**, 1957, p. 903; The number of linear directed rooted and connected graphs, *Trans. A. M. S.*, **78**, 1955, p. 445.

[5] F. HARARY et R. Z. NORMAN, *Theory of Graphs* (à paraître); The dissimilarity characteristic of linear graphs, *Proc. A. M. S.*, **5**, 1954, p. 131; The dissimilarity characteristic of Husimi trees, *Ann. of. Math.*, **58**, 1953, p. 134.

[6] R. OTTER, The number of trees, *Ann. of Math.*, **49**, 1948, p. 583.

[7] G. POLYÀ, Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen, und chemische Verbindungen, *Acta Math.*, **68**, 1937, p. 145.

有关問題可参看:

[1] H. IZBICKI, Reguläre Graphen 3., 4. und 5. Grades mit vorgegebenen abstrakten Automorphismengruppen, Farbenzahlen und Zusammenhängen, *Monat. für Math.*, **61**, 1957, p. 42 (trad. anglaise: mim.).

[2] J. RIORDAN, *Introduction to Combinatorial Analysis* (Wiley), New York, 1958.

[3] G. SABIDUSSI, Graphs with given group and given graph-theoretical properties, *Canad. J. Math.*, **9**, 1957, p. 515.

附注 有关分析的一般結果，本书所用的参考符号 [E. T. F. M.] 代表: C. Berge, Espaces topologiques et Fonctions multivoques (将在本丛书內出版).

名詞索引

七 画

八 画

九 画

十 三 画

十 四 画

十九画